Mise en place

Nous allons ici évoquer une des notions essentielles de l'année en analyse : la notion d'équation différentielle. On note $f(t) = \cos t\,;\quad g(t) = \sin t\,;\quad$ et $h(t) = -5\cos(t + \frac{\pi}{4})$. En calculant la dérivée seconde de ces trois fonctions, on constate que $f''(t) = -\cos(t)$ c'est à dire que $f''(t) + f(t) = 0$ et de même pour g et h, c'est à dire que $g''(t) + g(t) = 0$ et $h''(t) + h(t) = 0$. Ces trois fonctions vérifient la même propriété différentielle qui est qu'en ajoutant la fonction initiale à sa dérivée seconde on récupère 0. On dit que ces trois fonctions sont solutions de l'équation DIFFÉRENTIELLE : $y'' + y = 0$, ou encore avec les notations différentielles $\dfrac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + y = 0$.
Si l'on prend par exemple $f(x) = 2e^{-3x}$, on constate que $f'(x) = -3 \times 2e^{-3x}$ c'est à dire que $f'(x) = -3f(x)$.
Dans ce cas on dit que f est solution de $y' = -3y$, c'est à dire de $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 3y = 0$

I Les équations $y' + ay = 0$ et $y' + ay = b$

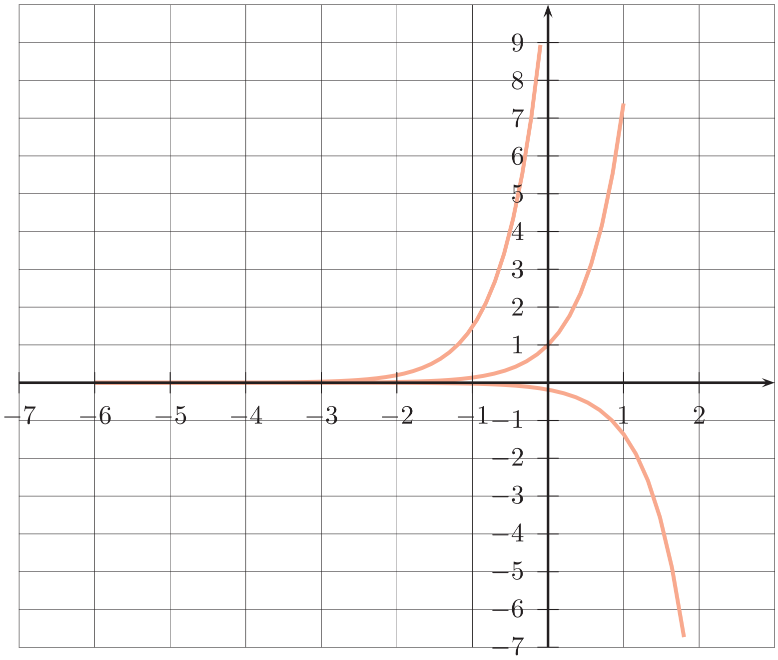
I.1 L'équation $y' + ay = 0$

Equation linéaire homogène, du premier ordre

Les fonctions solutions de l'équation différentielle $\boxed{y' + ay = 0 \text{ ou encore } \dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + ay = 0}$, sont définies sur $\mathbb{R}$ par :
$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad y = f(x) = Ce^{-ax}}$ où C est une constante réelle. Il y a donc une infinité de solutions, puisqu'il y a une infinité de choix pour C.

UNICITÉ DE LA SOLUTION SATISFAISANT À UNE CONDITION INITIALE :

Soient x_0 et y_0 deux réels donnés.
Il existe **une unique** fonction f définie sur $\mathbb{R}$, solution de l'équation $y' + ay = 0$ vérifiant $f(x_0) = y_0$, c'est à dire dont la courbe passe par (x_0, y_0)



Voici trois exemples de courbes, représentant des fonctions solutions d'une même équation différentielle $y' - 2y = 0$. En jouant sur la constante, on balaye tout le plan et on définit une infinité de courbes solutions de cette même équation. La courbe passant par $(0, 1)$ sur le graphique, est obtenue en prenant comme condition $f(0) = 1$, ce qui permet de trouver la constante C, en effet :
les solutions s'écrivent $f(x) = Ce^{2x}$ car l'équation est du type $y' + ay = 0$ avec $a = -2$, mais comme $f(0) = 1$ cela impose que $Ce^0 = 1$ donc $C = 1$. La solution est alors unique.

I.2 L'équation $y' + ay = b$

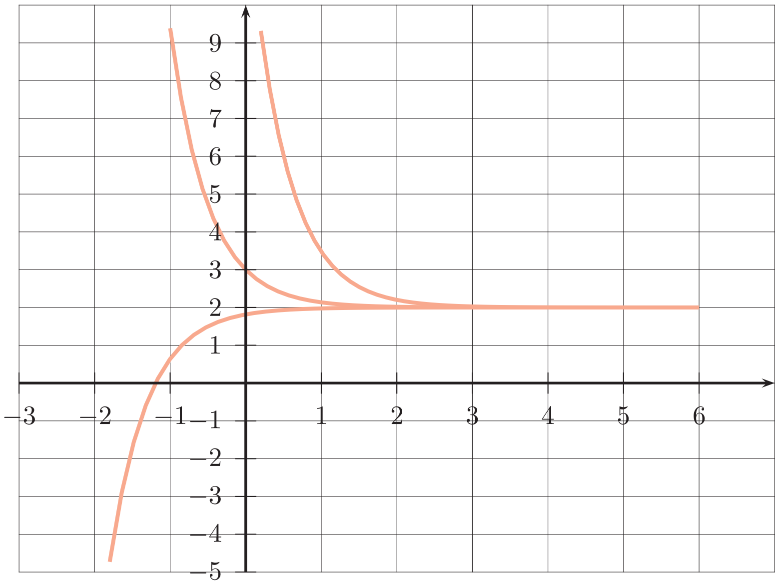
Equation linéaire du premier, avec un second membre constant

Soient a et b deux réels donnés, avec $a \neq 0$.On note (E) l'équation différentielle

$\boxed{(E) : \quad y' + ay = b \text{ ou encore de } \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + ay = b}$ Les solutions de l'équation différentielle (E) sont les fonctions f définies sur $\mathbb{R}$ par : $\boxed{y = f(x) = Ce^{-ax} + \frac{b}{a}}$ où C est une constante réelle. Il y a donc une infinité de solutions, puisqu'il y a une infinité de choix pour la constante C

UNICITÉ D'UNE SOLUTION VÉRIFIANT UNE CONDITION INITIALE

Soient x_0 et y_0 deux réels donnés, il existe alors une unique fonction f solution de (E) et telle $f(x_0) = y_0$



Voici trois exemples de courbes, représentant des fonctions solutions d'une même équation différentielle $y' + 2y = 4$. En jouant sur la constante, on balaye tout le plan et on définit une infinité de courbes solutions de cette même équation.
En donnant une condition sur la courbe, par exemple $f(0) = 3$, on impose que celle-ci passe par le point $(0, 3)$. Et cette solution est unique, en effet les solutions de l'équations proposée s'écrivent :$y = f(x) = Ce^{-2x} + \frac{4}{2}$ car $a = 2$ et $b = 4$. Mais comme $f(0) = 3$ cela impose que $Ce^0 + 2 = 3$ donc $C = 1$. La seule fonction solution est alors $f(x) = e^{-2x} + 2$.

II L'équation $y'' + \omega^2 y = 0$

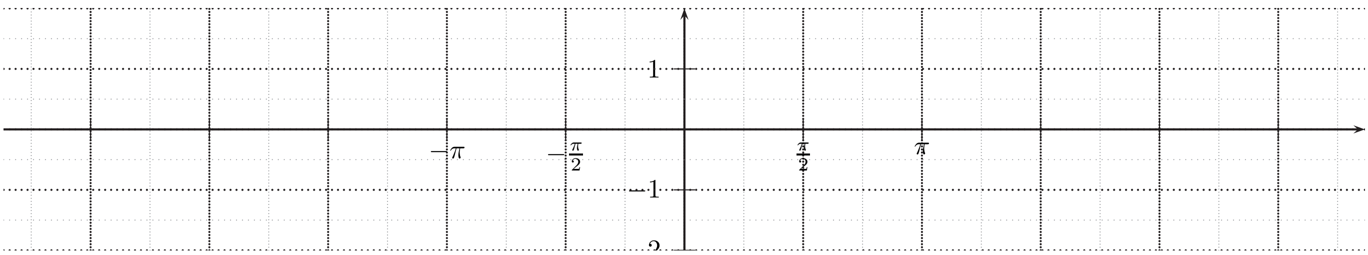
Equation homogène linéaire du second ordre

Soit ω un réel donné non nul. Toutes les fonctions solutions de l'équation différentielle $\boxed{y'' + \omega^2 y = 0 \text{ c'est à dire de } \dfrac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + \omega^2 y = 0}$ sont données par : $\boxed{y = f(x) = \alpha\cos(\omega x) + \beta\sin(\omega x)}$, avec α et β des constantes réelles.
Il y a donc une infinité de solutions, puisqu'une infinité de choix possibles pour α et β.

Cependant, si l'on impose par exemple que $f(x_0) = y_0$ et que $f'(x_0) = z_0$, c'est à dire que la courbe passe par (x_0, y_0) et qu'en ce point la tangente a pour pente z_0, il n'existera alors qu'une seule fonction vérifiant ces contraintes solution de l'équation différentielle.

Une autre forme des solutions

Soit ω un réel donné non nul. Toutes les fonctions solutions de l'équation différentielle $\boxed{y'' + \omega^2 y = 0}$ sont données par : $\boxed{y = f(x) = A\sin(\omega x + \varphi)}$, avec A et φ deux constantes réelles. Il y a donc une infinité de solutions, puisqu'une infinité de choix possibles pour A et B.
Cependant, si l'on impose par exemple que $f(x_0) = y_0$ et que $f'(x_0) = z_0$, c'est à dire que la courbe passe par (x_0, y_0) et qu'en ce point la tangente a pour pente z_0, il n'existera alors qu'une seule fonction vérifiant ces contraintes solution de l'équation différentielle.



Les trois sinusoïdes ci-dessus sont solutions de $y'' + 4y = 0$. Mais imaginez-en une infinité d'autres, qui vérifie la même équation différentielle, avec comme seul point commun entre toutes ces courbes : elles ont la même période. L'amplitude A et le déphasage φ, sont eux laissés libres, et ne seront fixés qu'en donnant des ***conditions initiales*** *genre $y(0) = 10$ et $y'(0) = 4$*

III Exercices simples

1. Donner les solutions des équations différentielles suivantes :

   i.) $y'' + y = 0$ ii.) $y'' + 3y = 0$ iii.) $2y'' + 32y = 0$

2. Donner **la** solution définie sur $\mathbb{R}$ des problèmes différentiels suivants :

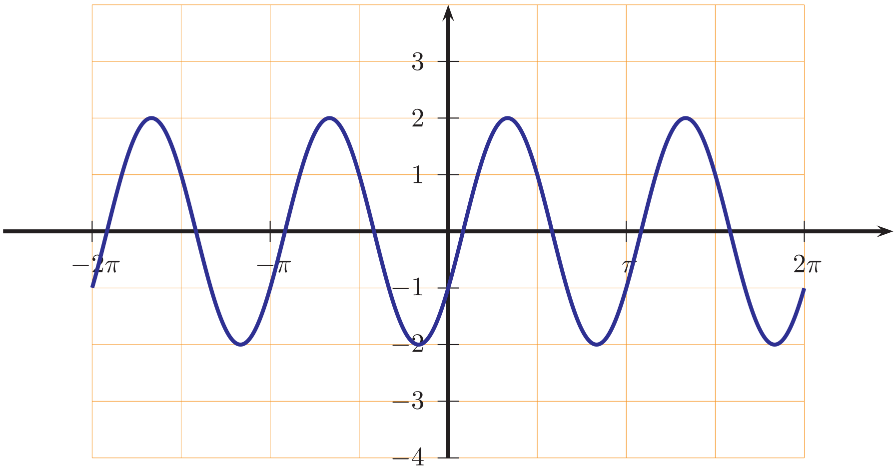
   i.) $y'' + 9y = 0$ avec $y(0) = 2$ et $y'(0) = 1$ ii.) $y'' + 4y = 0$ avec $y\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 1$ et $y'\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = 2$

IV le jour du bac

IV.1 exercice 1

On a tracé ci-dessous la courbe représentative de la fonction f définie sur l'intervalle $[-2\pi\ ;\ 2\pi]$ par

$$f(x) = 2\sin\left(2x - \frac{\pi}{6}\right).$$



1. i.) Par lecture graphique, donner le nombre de solutions de l'équation $f(x) = 2$ dans l'intervalle $[-2\pi\ ;\ 2\pi]$.
   ii.) Résoudre l'équation $f(x) = 2$ sur l'intervalle $[0\ ;\ \pi]$.
2. On note (E) l'équation différentielle $y'' + 4y = 0$, où y est une fonction définie et deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et y'' sa fonction dérivée seconde.
   i.) Résoudre l'équation (E).
   ii.) Déterminer la solution particulière g de (E) qui vérifie $g(0) = -1$ et $g'(0) = 2\sqrt{3}$ où g' désigne la fonction dérivée de g.
   iii.) Comparer $f(x)$ et $g(x)$ pour $x \in [-2\pi\ ;\ 2\pi]$.
   On rappelle que pour tous réels a et b, on a : $\sin(a-b) = \sin a\cos b - \sin b\cos a$.

   Pour cette question, toute trace de recherche, même incomplète, sera en prise en compte dans la notation.

IV.2 exercice 2

On considère l'équation différentielle notée

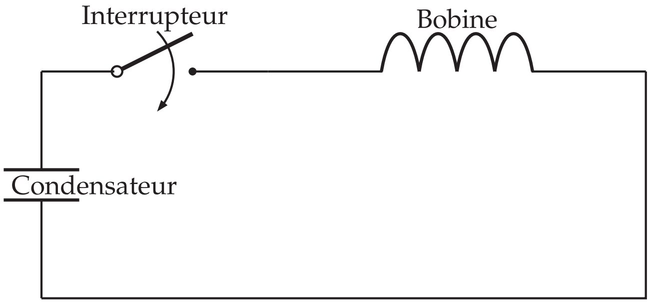
$$(E_1)\quad :\quad y' - 2y = \frac{9}{2}\mathrm{e}^x - 4,$$

où y désigne une fonction de la variable x définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Résoudre l'équation différentielle notée (E) : $y' - 2y = 0$.
2. On pose, pour tout réel x, $f(x) = y(x) - \frac{9}{2}\mathrm{e}^x + 2$, où y est solution de l'équation (E).
   i.) Calculer, pour tout réel x, $f'(x) - 2f(x)$. En déduire que la fonction f est solution de l'équation (E_1).
   ii.) Parmi les fonctions f précédentes, déterminer celle qui vérifie
   $f\left[\ln\left(\frac{1}{2}\right)\right] = 0.$

IV.3 exercice 3

On considère le circuit ci-dessous composé d'une bobine, d'un condensateur et d'un interrupteur.



Le condensateur est initialement chargé.

Au temps $t = 0$, on ferme l'interrupteur. On étudie alors la décharge du condensateur dans la bobine.

On admet qu'à un instant t, la charge q du condensateur, qui est une fonction du temps t, est solution de l'équation différentielle (E) :

$$q'' + 121 \times 10^6 q = 0$$

1. Résoudre l'équation différentielle (E).
2. Déterminer l'expression de la solution particulière q de (E) qui vérifie les conditions :

   $$q(0) = 2 \times 10^{-6} \quad \text{et} \quad q'(0) = 0.$$

   Dans la suite de l'exercice, on considère la fonction q ainsi obtenue.
3. Montrer que l'intensité $i(t)$, définie par $i(t) = q'(t)$, où q' désigne la fonction dérivée de la fonction q, est donnée, pour tout nombre réel t de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$, par :

   $$i(t) = -2,2 \times 10^{-2} \sin\left(11 \times 10^3 t\right).$$
4. Déterminer la valeur moyenne de la fonction q sur l'intervalle $\left[0\ ;\ \dfrac{\pi \times 10^{-3}}{2 \times 11}\right]$.

   On en donnera la valeur exacte.

   On rappelle que la valeur moyenne d'une fonction f sur l'intervalle $[a\ ;b]$ est donnée par :

   $$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$