

En utilisant vos connaissances et le cours, répondre au problème suivant :

**énoncé**

Soit f une fonction continue d'un intervalle $[a, b]$ dans $[a, b]$.
Démontrer que sa courbe coupe au moins une fois la droite d'équation $y = x$.

**Corrigé**

L'idée est donc de démontrer que l'équation $f(x) = x$ admet au moins une solution dans $[a, b]$.
On pose pour tout x de $[a; b]$, $g(x) = f(x) - x$.
On a g qui est continue sur $[a, b]$ comme somme de fonctions continues sur $[a, b]$,
par ailleurs $g(a) = f(a) - a \geq 0$ car la fonction f est à valeurs dans $[a, b]$, et $g(b) = f(b) - b \leq 0$ pour les mêmes raisons, or 0 est compris entre $g(a)$ et $g(b)$, on en déduit d'après le théorème des valeurs intermédiaires que l'équation $g(x) = 0$ admet au moins une solution c dans $[a, b]$.
Par ailleurs $g(c) = 0 \iff f(c) - c = 0 \iff f(c) = c$. donc il existe au moins un réel c dans $[a, b]$ tel que $f(c) = c$.
Cela signifie que toute fonction continue de $[a, b]$ dans $[a, b]$ admet au moins un point "fixe" par f , cela signifie que sa courbe coupe tout simplement au moins une fois la droite " $y = x$ ". (*utile pour les suites.....à méditer*)