exercice 1

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(\text{O}, \vec{u}, \vec{v})$.
On pose $a = 3,\ b = 5 - 2\text{i}$ et $c = 5 + 2\text{i}$. On désigne par A, B et C les points d'affixes respectives $a,\ b$ et c.
Soit M un point d'affixe z du plan, distinct des points A et B.

1. Montrer que ABC est un triangle rectangle isocèle.
2. Donner une interprétation géométrique de l'argument du nombre complexe $\dfrac{z-3}{z-5+2\text{i}}$.
3. Déterminer alors l'ensemble des points M d'affixe z tels que $\dfrac{z-3}{z-5+2\text{i}}$ soit un nombre réel strictement négatif.

exercice 2

Dans le plan muni d'un repère orthonormal direct $(\text{O}, \vec{u}, \vec{v})$, on considère les trois points A, B et C d'affixes respectives $1,\ 2+2\text{i}$ et $1-\text{i}$.

1. Représenter A, B et C.
2. Déterminer le module et un argument de $\dfrac{2+2\text{i}}{1-\text{i}}$. En déduire la nature du triangle OBC.
3. Que représente la droite (OA) pour le triangle OBC ? Justifier votre affirmation.

exercice 3

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $(\text{O}, \vec{u}, \vec{v})$ (unité graphique : 2 cm).
On rappelle que pour tout vecteur $\vec{w}$ non nul, d'affixe z, on a : $|z| = \|\vec{w}\|$ et
$\arg(z) = (\vec{u}, \vec{w})$ à 2π près.

On note A et B les points d'affixes respectives $-\text{i}$ et 3i.
On note f l'application qui, à tout point M du plan, d'affixe z, distinct de A, associe le point M' d'affixe z' telle que : $z' = \dfrac{\text{i}z+3}{z+\text{i}}$

1. Étude de quelques cas particuliers.
   (a) Démontrer que f admet deux points invariants J et K appartenant au cercle de diamètre [AB]. Placer ces points sur le dessin.
   (b) On note C le point d'affixe $c = -2 + \text{i}$. Démontrer que le point C′, image de C par f, appartient à l'axe des abscisses.
2. Pour tout point M du plan distinct de A et B, démontrer que
   $\arg(z') = \left(\overrightarrow{M\text{A}}, \overrightarrow{M\text{B}}\right) + \dfrac{\pi}{2}$ à 2π près.
3. Étude de deux ensembles de points.
   (a) Déterminer l'ensemble des points M d'affixe z tels que z' soit un nombre complexe imaginaire pur.
   (b) Soit M d'affixe z un point du cercie de diamètre [AB] privé des points A et B. À quel ensemble appartient le point M' ?

exercice 4

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $(\text{O}, \vec{u}, \vec{v})$. On prendra pour unité graphique 2 cm. Soit f l'application qui à tout point M du plan d'affixe z non nulle associe le point M' d'affixe z' telle que $z' = \dfrac{4}{\overline{z}}$, où $\overline{z}$ désigne le nombre complexe conjugué de z.

1. Déterminer l'ensemble des points invariants par f.

2. Déterminer l'ensemble des points dont l'image par l'application f est le point J d'affixe 1.
3. Soit α un nombre complexe non nul. Démontrer que le point A d'affixe α admet un antécédent unique par f, dont on précisera l'affixe.
4. (a) Donner une mesure de l'angle $\left(\overrightarrow{\text{O}M},\ \overrightarrow{\text{O}M'}\right)$. Interpréter géométriquement ce résultat.
   (b) Exprimer $|z'|$ en fonction de $|z|$. Si r désigne un réel strictement positif, en déduire l'image par f du cercle de centre O et de rayon r.
   (c) Choisir un point P du plan complexe non situé sur les axes de coordonnées et tel que OP = 3, et construire géométriquement son image P' par f.
5. On considère le cercle $\mathcal{C}_1$, de centre Jet de rayon 1. Montrer que l'image par f de tout point de $\mathcal{C}_1$,distinct de O, appartient à la droite D d'équation $x = 2$.

exercice 5

Le plan complexe est rapporté au repère orthonormal (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$). On prendra pour unité graphique I cm.

1. On considère les points A, B, C et D d'affixes respectives $z_{\text{A}} = 4+\text{i}$, $z_{\text{B}} = 1+\text{i}$, $z_{\text{C}} = 5\text{i}$ et $z_{\text{D}} = -3-\text{i}$. Placer ces points sur une figure.
2. Soit f l'application du plan dans lui-même qui, à tout point M d'affixe z associe le point M' d'affixe z' tel que : $z' = (1+2\text{i})z - 2 - 4\text{i}$.
   (a) Préciser les images des points A et B par f.
   (b) Montrer que f admet un unique point invariant Ω, dont on précisera l'affixe ω.
3. (a) Montrer que pour tout nombre complexe z, on a : $z' - z = -2\text{i}(2-\text{i}-z)$.
   (b) En déduire, pour tout point M différent du point Ω, la valeur de $\dfrac{MM'}{\Omega M}$ et une mesure en radians de l'angle $\left(\overrightarrow{M\Omega},\ \overrightarrow{MM'}\right)$
   (c) Quelle est la nature du triangle $\Omega MM'$?
   (d) Soit E le point d'affixe $z_{\text{E}} = -1-\text{i}\sqrt{3}$. Écrire z_{E} sous forme exponentielle puis placer le point E sur la figure. Réaliser ensuite la construction du point E′ associé au point E.

exercice 6

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct (O, $\vec{u}$, $\vec{v}$). On prendra pour unité graphique 5 cm.
On pose $z_0 = 2$ et, pour tout entier naturel n, $z_{n+1} = \dfrac{1+\text{i}}{2}z_n$. On note A_n le point du plan d'affixe z_n.

1. Calculer $z_1,\ z_2,\ z_3,\ z_4$ et vérifier que z_4 est un nombre réel.
   Placer les points A_0, A_1, A_2, A_3 et A_4 sur une figure.
2. Pour tout entier naturel n, on pose $u_n = |z_n|$.
   Justifier que la suite (u_n) est une suite géométrique puis établir que, pour tout enfler naturel n,
   $$u_n = 2\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n.$$
3. À partir de quel rang n_0 tous les points A_n appartiennent-ils au disque de centre O et de rayon 0,1 ?
4. (a) établir que, pour tout entier naturel n, $\dfrac{z_{n+1}-z_n}{z_{n+1}} = \text{i}$.
   En déduire la nature du triangle OA_nA_{n+1}.
   (b) Pour tout entier naturel n, on note ℓ_n la longueur de la ligne brisée
   $A_0A_1A_2\ldots A_{n-1}A_n$.
   On a ainsi : $\ell_n = A_0A_1 + A_1A_2 + \ldots + A_{n-1}A_n$.
   Exprimer ℓ_n, en fonction de n. Quelle est la limite de la suite (ℓ_n) ?

exercice 7

On se place dans un repère orthonormé et, pour tout entier naturel n, on définit les points (A_n) par leurs coordonnées $(x_n\ ;\ y_n)$ de la façon suivante :

$$\left\{\begin{array}{rcr} x_0 & = & -3 \\ y_0 & = & 4 \end{array}\right. \quad \text{et pour tout entier naturel } n : \left\{\begin{array}{rcl} x_{n+1} & = & 0,8x_n - 0,6y_n \\ y_{n+1} & = & 0,6x_n + 0,8y_n \end{array}\right.$$

1. (a) Déterminer les coordonnées des points $A_0,\ A_1$ et A_2.

   (b) Pour construire les points A_n ainsi obtenus, on écrit l'algorithme suivant :

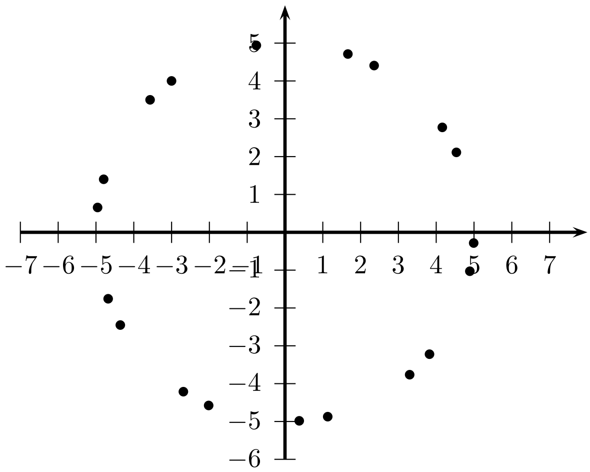
   ```
   Variables :
   i, x, y, t : nombres réels

   Initialisation :
   x prend la valeur −3
   y prend la valeur 4

   Traitement :
   Pour i allant de 0 à 20
           Construire le point de coordonnées (x ; y)
           t prend la valeur x
           x prend la valeur ....
           y prend la valeur ....
   Fin Pour
   ```

   Recopier et compléter cet algorithme pour qu'il construise les points A_0 à A_{20}.

   (c) à l'aide d'un tableur, on a obtenu le nuage de points suivant :

   Identifier les points $A_0,\ A_1$ et A_2.. On les nommera sur la figure jointe en **annexe 2, (à rendre avec la copie)**.

   Quel semble être l'ensemble auquel appartiennent les points A_n pour tout n entier naturel ?

2. Le but de cette question est de construire géométriquement les points A_n pour tout n entier naturel.
   Dans le plan complexe, on nomme, pour tout entier naturel $n,\ z_n = x_n + \mathrm{i}y_n$ l'affixe du point A_n.

   (a) Soit $u_n = |z_n|$. Montrer que, pour tout entier naturel $n,\ u_n = 5$. Quelle interprétation géométrique peut-on faire de ce résultat ?

   (b) On admet qu'il existe un réel θ tel que $\cos(\theta) = 0,8$ et $\sin(\theta) = 0,6$.
   Montrer que, pour tout entier naturel $n,\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}z_n = z_{n+1}$.

   (c) Démontrer que, pour tout entier naturel $n,\ z_n = \mathrm{e}^{\mathrm{i}n\theta}z_0$.

   (d) Montrer que $\theta + \dfrac{\pi}{2}$ est un argument du nombre complexe z_0.

(e) Pour tout entier naturel n, déterminer, en fonction de n et θ, un argument du nombre complexe z_n.
Représenter θ sur la figure jointe en **annexe 2, (à rendre avec la copie).**
Expliquer, pour tout entier naturel n, comment construire le point A_{n+1} à partir du point A_n.

exercice 8

1. Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation (E) d'inconnue z :

$$z^2 - 8z + 64 = 0.$$

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

2. On considère les points A, B et C d'affixes respectives $a = 4 + 4i\sqrt{3}$, $b = 4 - 4i\sqrt{3}$ et $c = 8i$.
   (a) Calculer le module et un argument du nombre a.
   (b) Donner la forme exponentielle des nombres a et b.
   (c) Montrer que les points A, B et C sont sur un même cercle de centre O dont on déterminera le rayon.
   (d) Placer les points A, B et C dans le repère $(O, \vec{u}, \vec{v})$.

Pour la suite de l'exercice, on pourra s'aider de la figure de la question **2. d.** complétée au fur et à mesure de l'avancement des questions.

3. On considère les points A′, B′ et C′ d'affixes respectives $a' = a e^{i\frac{\pi}{3}}$, $b' = b e^{i\frac{\pi}{3}}$ et $c' = c e^{i\frac{\pi}{3}}$.
   (a) Montrer que $b' = 8$.
   (b) Calculer le module et un argument du nombre a'.

Pour la suite on admet que $a' = -4 + 4i\sqrt{3}$ et $c' = -4\sqrt{3} + 4i$.

4. On admet que si M et N sont deux points du plan d'affixes respectives m et n alors le milieu I du segment $[MN]$ a pour affixe $\dfrac{m+n}{2}$ et la longueur MN est égale à $|n - m|$.
   (a) On note r, s et t les affixes des milieux respectifs R, S et T des segments [A′B], [B′C] et [C′A].
   Calculer r et s. On admet que $t = 2 - 2\sqrt{3} + i\left(2 + 2\sqrt{3}\right)$.
   (b) Quelle conjecture peut-on faire quant à la nature du triangle RST ?
   Justifier ce résultat.