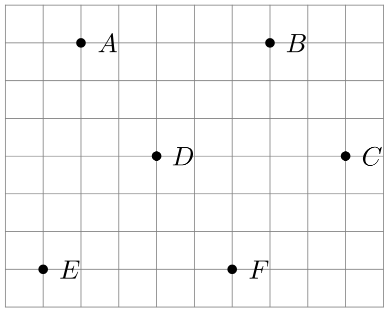
I compréhension du cours

I.1 exercice 1

En utilisant le quadrillage, dire pour chaque égalité si elle est vraie ou fausse :

1. $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{EF}$
2. $\overrightarrow{CD} = -\overrightarrow{AB}$
3. $\overrightarrow{DA} = \overrightarrow{DB}$
4. $\overrightarrow{ED} = \overrightarrow{BD}$
5. $\overrightarrow{AE} = \overrightarrow{BF}$
6. $\overrightarrow{EF} = -\overrightarrow{DC}$



1. Citer deux vecteurs égaux à $\overrightarrow{DB}$.
2. Citer trois vecteurs opposés au vecteur $\overrightarrow{AB}$.
3. Placer le point G tel que $\overrightarrow{DG} = \overrightarrow{0}$.

I.2 exercice 2

Soit $ABCD$ un parallélogramme. Placer un point M sur la diagonale $[BD]$.

1. Construire les point E et F vérifiant les égalités suivantes :

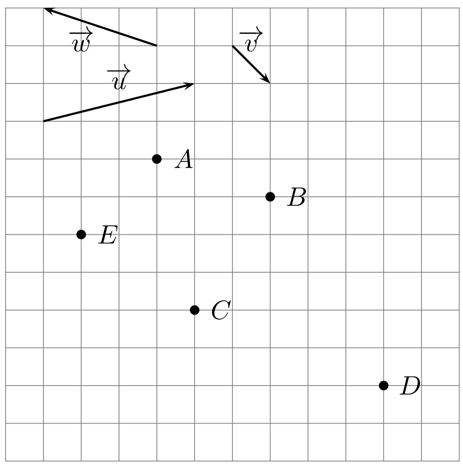
$$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AM} \quad ; \quad \overrightarrow{BF} = \overrightarrow{AM}.$$

2. Ecrire (et justifier) deux vecteurs égaux à $\overrightarrow{AD}$. Conclure sur $MBCE$.
3. Ecrire (et justifier) deux vecteurs égaux à $\overrightarrow{AB}$. Conclure sur $MDCF$.
4. Démontrer que les points E, C et F sont alignés.

I.3 exercice 3

En utilisant le quadrillage, construire :

1. Le point A' tel que $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{u}$
2. Le point B' tel que $\overrightarrow{BB'} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$
3. Le point C' tel que $\overrightarrow{CC'} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$
4. Le point D' tel que $\overrightarrow{DD'} = \overrightarrow{w} - \overrightarrow{v}$
5. Le point E' tel que $\overrightarrow{EE'} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$
6. Le point F tel que $\overrightarrow{AF} = \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE}$
7. Le point G tel que $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{AE}$
8. Le point H tel que $\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{EA} + \overrightarrow{BA}$
9. Le point I tel que $\overrightarrow{DI} = \overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BC}$
10. Le point J tel que $\overrightarrow{EJ} = \overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DB}$



I.4 exercice 4

Recopier et compléter chaque égalité en utilisant la relation de Chasles.

1. $\overrightarrow{A\ldots} = \overrightarrow{AI} + \overrightarrow{\ldots B}$
2. $\cdots = \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{\ldots M}$
3. $\overrightarrow{TS} = \overrightarrow{\ldots A} + \overrightarrow{\ldots B} + \ldots$
4. $\overrightarrow{AP} = \overrightarrow{AB} + \ldots$
5. $\overrightarrow{0} = \overrightarrow{BI} + \overrightarrow{\ldots C} + \overrightarrow{C\ldots}$
6. $\cdots = \overrightarrow{U\ldots} + \overrightarrow{KB} + \overrightarrow{\ldots S}$
7. $\overrightarrow{A\ldots} = \overrightarrow{\ldots P} + \cdots + \overrightarrow{TB}$
8. $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{\ldots C} + \overrightarrow{\ldots B} + \ldots$

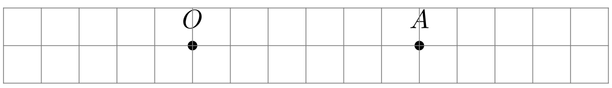
I.5 exercice 5

Soient A et B deux points tels que $AB = 6\text{cm}$.

1. Placer les points définis ci-dessous :
   (a) E tel que $\overrightarrow{AE} = \frac{1}{3}\overrightarrow{AB}$;
   (b) F tel que $\overrightarrow{AF} = \frac{1}{3}\overrightarrow{BA}$;
   (c) G tel que $\overrightarrow{AG} = -\overrightarrow{AB}$;
   (d) H tel que $\overrightarrow{BH} = -\frac{3}{2}\overrightarrow{AB}$;
   (e) I tel que $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{6}\overrightarrow{AE}$;
2. Donner la norme de chacun des vecteurs $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AF}$, $\overrightarrow{AG}$, $\overrightarrow{AH}$, $\overrightarrow{AI}$.

I.6 exercice 6

On considère la figure suivante.



1. Reproduire la figure et placer les points définis par :

$$\overrightarrow{OB} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{OA} \quad ; \quad \overrightarrow{BC} = \frac{2}{3}\overrightarrow{BA} \quad ; \quad \overrightarrow{AD} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{OA} \quad ; \quad \overrightarrow{CE} = \frac{1}{6}\overrightarrow{CB}$$

2. Déterminer les nombres réels, x, y, z tels que :

$$\overrightarrow{BC} = x\overrightarrow{ED} \quad ; \quad \overrightarrow{CB} = y\overrightarrow{CA} \quad ; \quad \overrightarrow{AE} = z\overrightarrow{BD}$$

I.7 exercice 7

Exprimer chacun des vecteurs suivants en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.

1. $\overrightarrow{u_1} = 2\overrightarrow{AB} - 3\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{BC}$
2. $\overrightarrow{u_2} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{BC} + 3(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB})$
3. $\overrightarrow{u_3} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BC} - 2(\overrightarrow{AB} + \dfrac{1}{3}\overrightarrow{CA})$
4. $\overrightarrow{u_4} = \dfrac{1}{2}\overrightarrow{BA} - \dfrac{2}{3}(\overrightarrow{AC} - \dfrac{3}{4}\overrightarrow{BC}) - \overrightarrow{AB}$
5. $\overrightarrow{u_5} = 2\overrightarrow{CA} - \overrightarrow{BC} + 3(\overrightarrow{AC} - \dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB})$

I.8 exercice 8

Soit ABC un triangle.

1. Placer le point E tel que $\overrightarrow{AE} = 2\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}$.
2. Placer le point F tel que $\overrightarrow{BF} = 2\overrightarrow{BA} + \overrightarrow{AC}$.
3. Placer le point G tel que $\overrightarrow{BG} = \overrightarrow{BA} + \frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$.
4. Exprimer les vecteurs $\overrightarrow{AE}$, $\overrightarrow{AF}$ et $\overrightarrow{AG}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
5. Soit D le point tel que $3\overrightarrow{AD} + 2\overrightarrow{BD} = \overrightarrow{CD}$.
   (a) Exprimer le vecteur $\overrightarrow{AD}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
   (b) Placer le point D.

II vecteurs et coordonnées

II.1 exercice 1

Dans un repère orthogonal (O, I, J) d'unité le centimètre, on considère les points :

E$(-3\ ;\ 0)$; B(2 ; 0) ; T(0 ; 4) et U(5 ; 4).

1. Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{ET}$, $\overrightarrow{EB}$, $\overrightarrow{UE}$ et $\overrightarrow{BU}$.
2. (a) Calculer la longueur ET, puis la longueur EB.
   (b) Quelle est la nature du quadrilatère $TUBE$? Justifier.
   (c) Soit F est le centre de symétrie de $TUBE$. Déterminer ses coordonnées puis placer le.
3. (a) (C) est le cercle de centre E qui passe par B. Il recoupe l'axe des abscisses en A. Placer A. Quelle est la nature du triangle ATB ? Justifier.
   (b) Démontrer que les droites (AT) et (EF) sont parallèles.
   (c) À l'aide d'une propriété, comparer les longueurs EF et AT.
4. Quelle est l'image du triangle ATE par la translation qui transforme A en E ?

II.2 exercice 2

Soient $\overrightarrow{u}(-2; 5)$ et $\overrightarrow{v}(3; \frac{1}{4})$ deux vecteurs définis par leurs coordonnées dans le repère (O, I, J). Calculer les coordonnées de chacun des vecteurs suivants :

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \quad ; \quad 2\overrightarrow{u} \quad ; \quad -\frac{3}{7}\overrightarrow{v} \quad ; \quad -3\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \quad ; \quad 2\overrightarrow{v} + 0.8\overrightarrow{u} \quad ; \quad 1.5\overrightarrow{u} - \frac{3}{5}\overrightarrow{v}.$$

II.3 exercice 3

Dans un repère (O, I, J), on considère les points A, B et C de coordonnées respectives $(-2; -1)$, $(0; 1)$ et $(-4; 0)$ et un point D de coordonnées $(x; y)$ tel que $\overrightarrow{CD} = 2\overrightarrow{AB}$.

1. Placer sans calcul le point D.
2. Donner les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.
3. Calculer les coordonnées du point D et vérifier le résultat sur la figure.

II.4 exercice 4

En utilisant la proposition du cours, déterminer parmi les paires de vecteurs ci-dessous celles qui sont composées de vecteurs colinéaires.

1. $\overrightarrow{u}(2; 5)$ et $\overrightarrow{v}(-4; -10)$;
2. $\overrightarrow{u}(-3; 9)$ et $\overrightarrow{v}(2; 6)$;
3. $\overrightarrow{u}(5; 1)$ et $\overrightarrow{v}(-10; 2)$;
4. $\overrightarrow{u}(-4; 12)$ et $\overrightarrow{v}(6; -18)$;
5. $\overrightarrow{u}(0; 7)$ et $\overrightarrow{v}(0; -8)$;
6. $\overrightarrow{u}(0; 7)$ et $\overrightarrow{v}(-8; 0)$.

II.5 exercice 5

On se place dans un repère (O, I, J). Soient les points $A(-7; 4)$, $B(-4; 10)$, $C(10; 13)$ et $D(6; 5)$.

1. (a) Déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$.
   (b) En déduire que le quadrilatère $ABCD$ est un trapèze.
2. On définit le point I par l'égalité $\overrightarrow{IA} = 3\overrightarrow{AD}$. J et K sont les milieux respectifs de $[AB]$ et $[CD]$.
   (a) Déterminer les coordonnées de I.
   (b) Déterminer les coordonnées de J et K.
   (c) Démontrer que les points I,J et K sont alignés.

II.6 exercice 6

Soit ABC un triangle quelconque non aplati. M et N sont les points définis par :

$$\overrightarrow{AM} = \frac{3}{5}\overrightarrow{AB} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{AN} = \frac{2}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{5}\overrightarrow{AC}$$

1. (a) Justifier que (A, B, C) est un repère du plan.
   (b) Donner les coordonnées de A, B, C, M et N dans ce repère. Justifier.
2. Démontrer de deux manières que les droites (MN) et (BC) sont parallèles :
   (a) En utilisant les coordonnées.
   (b) En exprimant $\overrightarrow{MN}$ en fonction de $\overrightarrow{BC}$.
3. (a) Déterminer les coordonnées du point P tel que $MNPB$ soit un parallélogramme.
   (b) Démontrer que P appartient à la droite (BC).

II.7 exercice 7

Soit ABC un triangle quelconque non aplati. On appelle M le milieu du segment $[AB]$ et N le milieu du segment $[AC]$. On désigne par K et L les milieux respectifs des segments $[CM]$ et $[BN]$. Soit P et Q les points définis par :

$$\overrightarrow{NP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{NM} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{MQ} = \frac{1}{3}\overrightarrow{MN}.$$

1. (a) Faire une figure.
   (b) Justifier que (A, B, C) est un repère du plan.
   (c) Donner les coordonnées de A, B, C, M, N, K, L, P et Q dans ce repère.
2. Démontrer que les droites (PQ) et (KL) sont parallèles.
3. Démontrer que les points A,P,K d'une part et A,Q,L d'autre part sont alignés.