Exercice 1

Métropole Juin 2013

Soit la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbf{N}$ par : $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{2}{3}u_n + \frac{1}{3}n + 1$.

1. **a.** Calculer u_1, u_2, u_3 et u_4. On pourra en donner des valeurs approchées à 10^{-2} près.

b. Formuler une conjecture sur le sens de variation de cette suite.

2. **a.** Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant n + 3$.

b. Démontrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{3}(n + 3 - u_n)$.

c. En déduire une validation de la conjecture précédente.

3. On désigne par (v_n) la suite définie sur $\mathbf{N}$ par $v_n = u_n - n$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{2}{3}$.

b. En déduire que pour tout entier naturel n, $u_n = 2\left(\frac{2}{3}\right)^n + n$.

4. Pour tout entier naturel non nul n, on pose : $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + u_1 + \ldots + u_n$.

Exprimer S_n en fonction de n.

Exercice 2

Polynésie 2013

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 0$ et, pour tout entier naturel $n, u_{n+1} = u_n + 2n + 2$.

1. Calculer u_1 et u_2.

2. On considère les deux algorithmes suivants :

Algorithme 1		**Algorithme 2**	
Variables :	n est un entier naturel u est un réel	**Variables :**	n est un entier naturel u est un réel
Entrée :	Saisir la valeur de n	**Entrée :**	Saisir la valeur de n

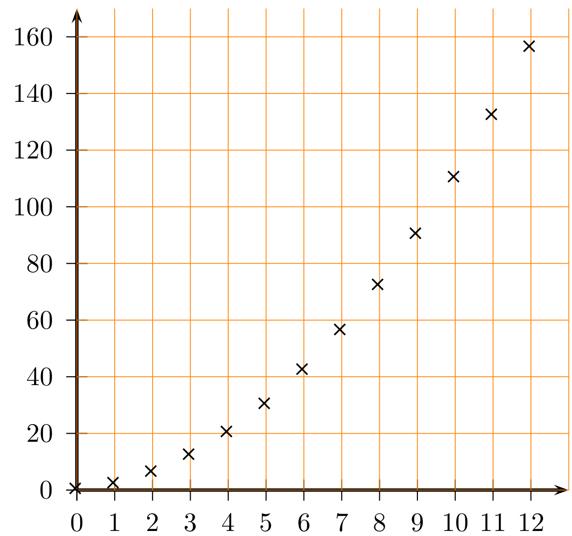
Traitement :	u prend la valeur 0
	Pour i allant de 1 à n :
	  u prend la valeur $u + 2i + 2$
	Fin Pour
		Traitement :	u prend la valeur 0
			Pour i allant de 0 à $n - 1$:
			  u prend la valeur $u + 2i + 2$
			Fin Pour

Sortie :	Afficher u	**Sortie :**	Afficher u

De ces deux algorithmes, lequel permet d'afficher en sortie la valeur de u_n, la valeur de l'entier naturel n étant entrée par l'utilisateur ?

3. À l'aide de l'algorithme, on a obtenu le tableau et le nuage de points ci-dessous où n figure en abscisse et u_n en ordonnée.

n	u_n
0	0
1	2
2	6
3	12
4	20
5	30
6	42
7	56
8	72
9	90
10	110
11	132
12	156



a. Quelle conjecture peut-on faire quant au sens de variation de la suite (u_n) ?
Démontrer cette conjecture.

b. La forme parabolique du nuage de points amène à conjecturer l'existence de trois réels a, b et c tels que, pour tout entier naturel n, $u_n = an^2 + bn + c$.
Dans le cadre de cette conjecture, trouver les valeurs de a, b et c à l'aide des informations fournies.

4. On définit, pour tout entier naturel n, la suite (v_n) par : $v_n = u_{n+1} - u_n$.

a. Exprimer v_n en fonction de l'entier naturel n. Quelle est la nature de la suite (v_n) ?

b. On définit, pour tout entier naturel n, $S_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = v_0 + v_1 + \cdots + v_n$.

Démontrer que, pour tout entier naturel n, $S_n = (n+1)(n+2)$.

c. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $S_n = u_{n+1} - u_0$, puis exprimer u_n en fonction de n.

Exercice 3 Antilles 2014

Soit la suite numérique (u_n) définie sur l'ensemble des entiers naturels $\mathbb{N}$ par : $\begin{cases} u_0 &= 2 \\ u_{n+1} &= \frac{1}{5}u_n + 3 \times 0,5^n. \end{cases}$.

1. **a.** Recopier et, à l'aide de la calculatrice, compléter le tableau des valeurs de la suite (u_n) approchées à 10^{-2} près :

n	0	1	2	3	4	5	6	7	8
u_n	2								

b. D'après ce tableau, énoncer une conjecture sur le sens de variation de la suite (u_n).

2. **a.** Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n non nul on a

$$u_n \geqslant \frac{15}{4} \times 0,5^n.$$

b. En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$.

c. Démontrer que la suite (u_n) est convergente.

3. *On se propose, dans cette question de déterminer la limite de la suite* (u_n).

Soit (v_n) la suite définie sur $\mathbb{N}$ par $v_n = u_n - 10 \times 0,5^n$.

a. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $\frac{1}{5}$. On précisera le premier terme de la suite (v_n).

b. En déduire, que pour tout entier naturel n,

$$u_n = -8 \times \left(\frac{1}{5}\right)^n + 10 \times 0,5^n.$$

c. Déterminer la limite de la suite (u_n)

4. Recopier et compléter les lignes (1), (2) et (3) de l'algorithme suivant, afin qu'il affiche la plus petite valeur de n telle que $u_n \leqslant 0,01$.

Entrée :	n et u sont des nombres	
Initialisation :	n prend la valeur 0	
	u prend la valeur 2	
Traitement :	Tant que ...	(1)
	n prend la valeur ...	(2)
	u prend la valeur ...	(3)
	Fin Tant que	
Sortie :	Afficher n	

Exercice 4 Métropole septembre 2013

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $u_0 = 2$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{2u_n + 1}$.

On admet que pour tout entier naturel $n, u_n > 0$.

1. **a.** Calculer u_1, u_2, u_3, u_4. On pourra en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

b. Vérifier que si n est l'un des entiers 0, 1, 2, 3, 4 alors $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$.

c. Établir que pour tout entier naturel $n, u_{n+1} - 1 = \frac{-u_n + 1}{2u_n + 1}$.

d. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$

2. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

a. Établir que pour tout entier naturel $n, v_{n+1} = \dfrac{-u_n + 1}{3u_n + 3}$.

b. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$.
En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

c. On admet que pour tout entier naturel $n, u_n = \dfrac{1 + v_n}{1 - v_n}$.
Exprimer u_n en fonction de n et déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 5 Liban 2013

On considère la suite numérique (v_n) définie pour tout entier naturel n par $\left\{\begin{array}{lcl} v_0 & = & 1 \\ v_{n+1} & = & \dfrac{9}{6 - v_n}\end{array}\right.$

Partie A

1. On souhaite écrire un algorithme affichant, pour un entier naturel n donné, tous les termes de la suite, du rang 0 au rang n.
Parmi les trois algorithmes suivants, un seul convient. Préciser lequel en justifiant la réponse.

Algorithme N° 1	Algorithme N° 2	Algorithme N° 3

Variables :
v est un réel
i et n sont des entiers naturels
 	
Début de l'algorithme :
Lire n
v prend la valeur 1
Pour i variant de 1 à n faire
  v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$
Fin pour
Afficher v
 	
Fin algorithme
	Variables :
	v est un réel
	i et n sont des entiers naturels
	
	Début de l'algorithme :
	Lire n
	Pour i variant de 1 à n faire
	v prend la valeur 1
	  Afficher v
	v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$
	Fin pour
	
	Fin algorithme
		Variables :
		v est un réel
		i et n sont des entiers naturels
		
		Début de l'algorithme :
		Lire n
		v prend la valeur 1
		Pour i variant de 1 à n faire
		  Afficher v
		v prend la valeur $\dfrac{9}{6-v}$
		Fin pour
		Afficher v
		Fin algorithme

2. Pour $n = 10$ on obtient l'affichage suivant :

1	1,800	2,143	2,333	2,455	2,538	2,600	2,647	2,684	2,714

Pour $n = 100$, les derniers termes affichés sont :

2,967	2,968	2,968	2,968	2,969	2,969	2,969	2,970	2,970	2,970

Quelles conjectures peut-on émettre concernant la suite (v_n) ?

3. **a.** Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $0 < v_n < 3$.

b. Démontrer que, pour tout entier naturel n, $v_{n+1} - v_n = \dfrac{(3 - v_n)^2}{6 - v_n}$.
La suite (v_n) est-elle monotone ?

c. Démontrer que la suite (v_n) est convergente.

Partie B Recherche de la limite de la suite (v_n)

On considère la suite (w_n) définie pour tout n entier naturel par $w_n = \dfrac{1}{v_n - 3}$.

1. Démontrer que (w_n) est une suite arithmétique de raison $-\dfrac{1}{3}$

2. En déduire l'expression de (w_n), puis celle de (v_n) en fonction de n.

3. Déterminer la limite de la suite (v_n).

Exercice 6 Polynésie 2013

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et telle que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{1+2u_n}$

1. **a.** Calculer u_1 et u_2.

b. Démontrer, par récurrence, que pour tout entier naturel n, $0 < u_n$.

2. On admet que pour tout entier naturel n, $u_n < 1$.

a. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

b. Démontrer que la suite (u_n) converge.

3. Soit (v_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $v_n = \dfrac{u_n}{1-u_n}$.

a. Montrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison 3.

b. Exprimer pour tout entier naturel n, v_n en fonction de n.

c. En déduire que, pour tout entier naturel n, $u_n = \dfrac{3^n}{3^n+1}$.

d. Déterminer la limite de la suite (u_n).

Exercice 7 Antilles 2015

Partie A

On considère l'algorithme suivant :

Variables :	k et p sont des entiers naturels u est un réel
Entrée :	Demander la valeur de p
Traitement	: Affecter à u la valeur 5 Pour k variant de 1 à p Affecter à u la valeur $0,5u + 0,5(k-1) - 1,5$ Fin de pour
Sortie :	Afficher u

Faire fonctionner cet algorithme pour $p = 2$ en indiquant les valeurs des variables à chaque étape.
Quel nombre obtient-on en sortie ?

Partie B

Soit (u_n) la suite définie par son premier terme $u_0 = 5$ et, pour tout entier naturel n par $u_{n+1} = 0,5u_n + 0,5n - 1,5$.

1. Modifier l'algorithme de la première partie pour obtenir en sortie toutes les valeurs de u_n pour n variant de 1 à p.

2. A l'aide de l'algorithme modifié, après avoir saisi $p = 4$, on obtient les résultats suivants :

n	1	2	3	4
u_n	1	$-0,5$	$-0,75$	$-0,375$

Peut-on affirmer, à partir de ces résultats, que la suite (u_n) est décroissante ?
Justifier.

3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 3, $u_{n+1} > u_n$.
Que peut-on en déduire quant au sens de variation de la suite (u_n) ?

4. Soit (v_n) la suite définie pour tout entier naturel n par $v_n = 0,1u_n - 0,1n + 0,5$.
Démontrer que la suite (v_n) est goniométrique de raison $0,5$ et exprimer alors v_n en fonction de n.

5. En déduire que, pour tout entier naturel n,

$$u_n = 10 \times 0,5^n + n - 5.$$

6. Déterminer alors la limite de la suite (u_n).