Première partie
L'algèbre

I résolution d'équations

I.1 résoudre une équation avec $\ln$

Résoudre les équations suivantes :

1. $\ln(x) + \ln(x-3) = \ln(4)$
2. $\ln(x^2+2x) = 0$
3. $\ln(x+3) + \ln(5-x) = \ln 3 + \ln 5$
4. $\ln(x^2) - \ln(x-1) = 2\ln 2$

I.2 résoudre une équation en $\ln x$ et en e^x

Résoudre les équations suivantes :

1. $(\ln(x))(2+\ln x) = 0$
2. $(\ln x)^2 - 4 = 0$
3. $2(\ln x)^2 - 3\ln x - 5 = 0$
4. $(\ln x + 3)(-2\ln x + 1) = 0$
5. $e^x(e^x+2) = 0$
6. $(3e^x - 1)(5 - 3e^x) = 0$
7. $2e^x + 3e^x - 5 = 0$

II résolution d'inéquations

II.1 résoudre une équation avec $\ln$ et exp

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $\ln(-3x+2) \leqslant \ln 3$
2. $\ln(x^2+2x) \geqslant 0$
3. $\ln(x-1) - \ln 3 \geqslant \ln 2 - \ln(x+4)$
4. $\ln(x^2) - \ln(x-1) \leqslant 2\ln 2$
5. $e^{2x+3} < 3$
6. $e^{-x-1} > 5$

II.2 résoudre une inéquation en $\ln x$ et en e^x

Résoudre les inéquations suivantes :

1. $(\ln(x))(2+\ln x) \leqslant 0$
2. $(\ln x)^2 - 4 > 0$
3. $2(\ln x)^2 - 3\ln x - 5 \leqslant 0$
4. $(\ln x + 3)(-2\ln x + 1) > 0$
5. $e^x(e^x+2) > 0$
6. $(3e^x - 1)(5 - 3e^x) < 0$
7. $2e^x + 3e^x - 5 > 0$

III d'autres problèmes

Déterminer le plus petit entier n solution de :

1. $1.2^n \geqslant 2000$
2. $1.015^n \geqslant 10$
3. $0.95^n \leqslant 0.1$
4. $0.99^n \leqslant 0.7$

Deuxième partie

Les études de fonctions

exercice 1

On donne ici la fonction f définie sur $]0,+\infty[\setminus\{1\}$ par $f(x)=\dfrac{1}{x\ln x}$ et la fonction g définie sur $]0,+\infty[$ par $g(x)=(\ln x)^2-2\ln x$

1. Justifier l'ensemble de définition de f

2. Déterminer la dérivée de f, puis dresser le tableau de variations de f

3. Étudier g.

exercice 2

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par :

$$f(x)=x-\frac{\ln x}{x^2}.$$

On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans un repère orthonormal $\left(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath}\right)$ (unité graphique 2 cm).

1. Soit u la fonction définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $u(x)=x^3-1+2\ln x$.

  a. Étudier le sens de variation de la fonction u sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

  b. Calculer $u(1)$ et en déduire le signe de $u(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

2. Étude de la fonction f

  a. Déterminer les limites de f en 0 et en $+\infty$.

  b. Déterminer la fonction dérivée de f et construire le tableau de variations de la fonction f.

exercice 3

On appelle f la fonction définie sur l'intervalle $\mathrm{I}=1]-2\ ;\ +\infty[$ par
$f(x)=1+x\ln(x+2)$.
On note $(\mathcal{C}_f)$ la courbe représentative de f dans le repère orthonormal $(\mathrm{O}\ ;\vec{\imath},\ \vec{\imath})$. (unité graphique 4 cm).

1. Étude des variations de la dérivée f'.

  a. f' désigne la fonction dérivée première de f et f'' la fonction dérivée seconde. Calculer $f'(x)$ puis $f''(x)$ pour x appartenant à l'intervalle $]-2\ ;\ +\infty[$.

  b. Étudier les variations de f' sur l'intervalle $]-2\ ;\ +\infty[$.

  c. Déterminer les limites de f' en -2 et en $+\infty$.

2. Étude du signe de $f'(x)$.

  a. Montrer que sur l'intervalle $]-2\ ;\ +\infty[$ l'équation $f'(x)=0$ admet une solution unique α appartenant à l'intervalle $[-0,6\ ;\ -0,5]$.

  b. En déduire le signe de $f'(x)$ selon les valeurs de x.

3. Étude des variations de f

  a. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]-2\ ;\ +\infty[$.

  b. Déterminer les limites de f en -2 et en $+\infty$.

  c. Dresser le tableau de variation de f.

exercice 4

Pour tout nombre réel k strictement positif, on considère la fonction f_k définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f_k(x) = \ln(x) - kx^2 + 1.$$

1. Déterminer la limite de la fonction f_k en 0.

2. On rappelle que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x} = 0$.

Démontrer que $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(x)}{x^2} = 0$.

En déduire la limite de la fonction f_k en $+\infty$.

3. Montrer que, pour tout nombre réel x strictement positif, $f_k'(x) = \dfrac{1-2kx^2}{x}$.

4. Pour un nombre réel k strictement positif : on donne ci-dessous le tableau de variations de la fonction f_k.

x	0		$\dfrac{1}{\sqrt{2k}}$		$+\infty$
$f_k(x)$	$\Vert$	$\nearrow$	$\dfrac{1-\ln(2k)}{2}$	$\searrow$	

Justifier les renseignements sur les variations de la fonction f_k figurant dans ce tableau.

exercice 5

Soit φ la fonction définie sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ par

$$\varphi(x) = 1 + x^2 - 2x^2 \ln x.$$

1. **a.** Étudier le sens de variation de la fonction φ sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$.

b. Calculer $\varphi(\mathrm{e})$. Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet une unique solution α sur l'intervalle $[1\,;\,\mathrm{e}]$. Déterminer un encadrement de α d'amplitude 10^{-1}.

c. Déterminer le signe de $\varphi(x)$ suivant les valeurs de x.

2. Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln x}{1+x^2}.$$

On note f' la fonction dérivée de f.

a. Calculer $f'(x)$ et montrer que pour tout $x \geqslant 1$ on a : $f'(x) = \dfrac{\varphi(x)}{x\left(1+x^2\right)^2}$.

b. Déduire de la question 1. le sens de variation de la fonction f sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$.

c. Démontrer que pour tout x appartenant à l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ on a :

$$0 \leqslant f(x) \leqslant \frac{\ln x}{x^2}.$$

d. En déduire $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$.

exercice 6

Partie A : étude d'une fonction

On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{x}{\ln x}$$

Sur l'annexe jointe, on a tracé dans un repère orthogonal la courbe $\mathcal{C}$ représentative de la fonction f ainsi que la droite $\mathcal{D}$ d'équation $y = x$.

1. Calculer les limites de la fonction f en $+\infty$ et en 1.

2. Étudier les variations de la fonction f sur l'intervalle $]1\ ;\ +\infty[$.

3. En déduire que si $x \geqslant \text{e}$ alors $f(x) \geqslant \text{e}$.

Partie B : étude d'une suite récurrente

On considère la suite (u_n) définie par :

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_0 & = & 5 \\ \text{pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} & = & f(u_n) \end{array}\right.$$

1. Sur l'annexe jointe, à rendre avec la copie, en utilisant la courbe $\mathcal{C}$ et la droite $\mathcal{D}$, placer les points A_0, A_1 et A_2 d'ordonnée nulle et d'abscisses respectives u_0, u_1 et u_2. On laissera apparents les traits de construction.
Quelles conjectures peut-on faire sur les variations et la convergence de la suite (u_n) ?

2. **a.** Montrer que, pour tout entier naturel n, on a : $u_n \geqslant \text{e}$.

b. Déterminer les variations de la suite (u_n).

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente.

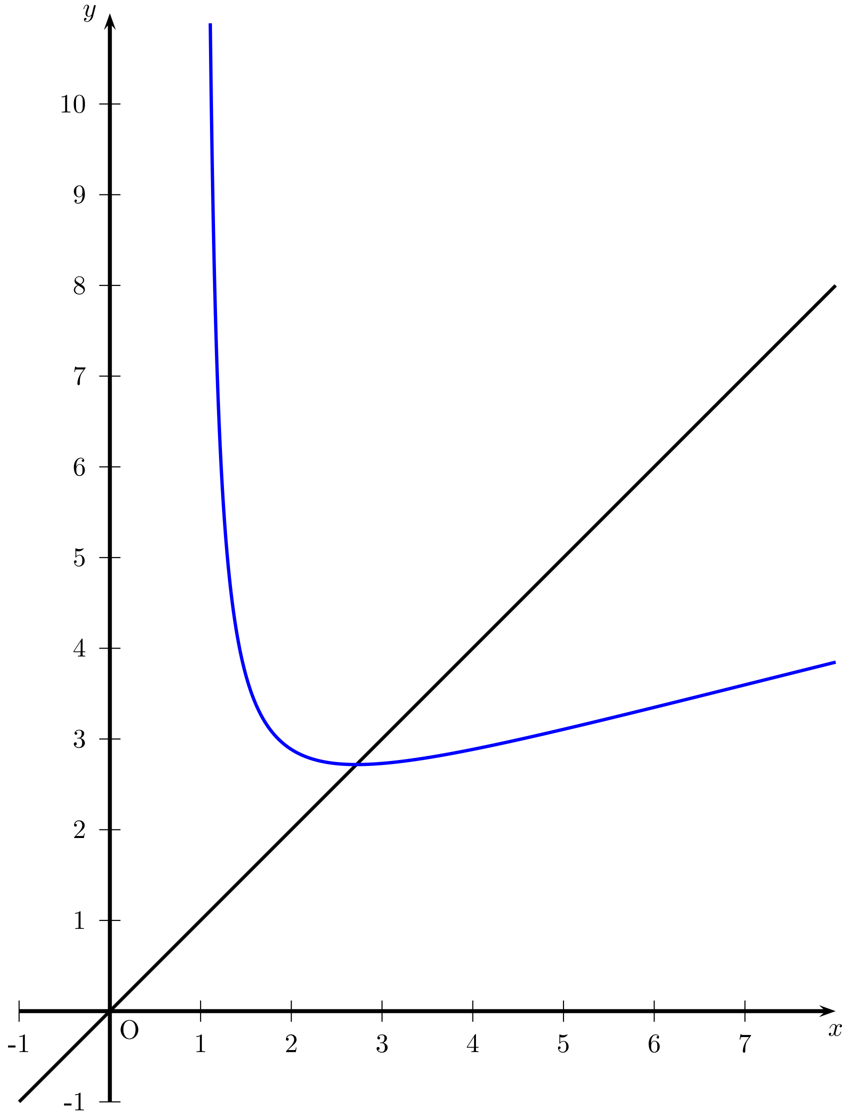
d. Déterminer sa limite ℓ.

3. On donne l'algorithme suivant :

```
X est une variable réelle ; Y est une variable entière
Affecter 5 à X et 0 à Y
Tant que X > 2,72
    Faire
        Affecter (X/ ln X) à X
        Affecter Y + 1 à Y
Fin de Tant que
Afficher Y
```

À l'aide du tableau suivant, obtenu avec un tableur, déterminer la valeur affichée par l'algorithme.

n	0	1	2	3	4	5
u_n	5	3,106 674 672 8	2,740 652 532 3	2,718 372 634 6	2,718 281 830 01	2,718 281 828 5


y
10
9
8
7
6
5
4
3
2
1
-1
O
-1
1
2
3
4
5
6
7
x

Troisième partie

entrainement

1. Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

a. $f(x) = (\ln x)^5$ sur $]0; +\infty[$.

$\boxed{\frac{5}{x} \times (\ln x)^4}$

b. $f(x) = \ln(x + \sqrt{1 + x^2})$ sur $\mathbb{R}$

$\boxed{\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}}$

c. $f(x) = \ln(\ln x)$ sur $]1; +\infty[$

$\boxed{\frac{1}{x\ln x}}$

d. $\ln\left(\dfrac{1-x}{1+x}\right)$ sur $]-1, 1[$

$\boxed{\frac{2}{x^2-1}}$

e. $f(x) = x\ln(x^2 + 1)$ sur $\mathbb{R}$

$\boxed{\ln(1 + x^2) + \frac{2x^2}{1+x^2}}$

2. Donner une primitive des fonctions suivantes :

a. $f(x) = \dfrac{3}{2x+1}$ sur $]-0.5; +\infty[$

$\boxed{\frac{3}{2}\ln(2x + 1) + k}$

b. $f(x) = \dfrac{x}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$

$\boxed{\frac{1}{2}\ln(1 + x^2) + k}$

c. $f(x) = \dfrac{\ln x}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$

$\boxed{\frac{1}{2}(\ln x)^2 + k}$

d. $f(x) = \dfrac{1}{x\ln x}$ sur $]1; +\infty[$

$\boxed{\ln(\ln x) + k}$

3. Déterminer les limites en a des fonctions suivantes :

a. $f(x) = x^2 - \ln x$ en $a = +\infty$

$\boxed{\textit{factoriser par } x^2 \text{ : résultat } +\infty}$

b. $f(x) = \dfrac{e^x + x}{e^x - x}$ en $a = +\infty$

$\boxed{\textit{factoriser haut et bas par } e^x \textit{ : résultat } 1}$

c. $f(x) = x^2\ln x + 3x - 1$ en $a = 0$

$\boxed{\text{résultat } -1}$