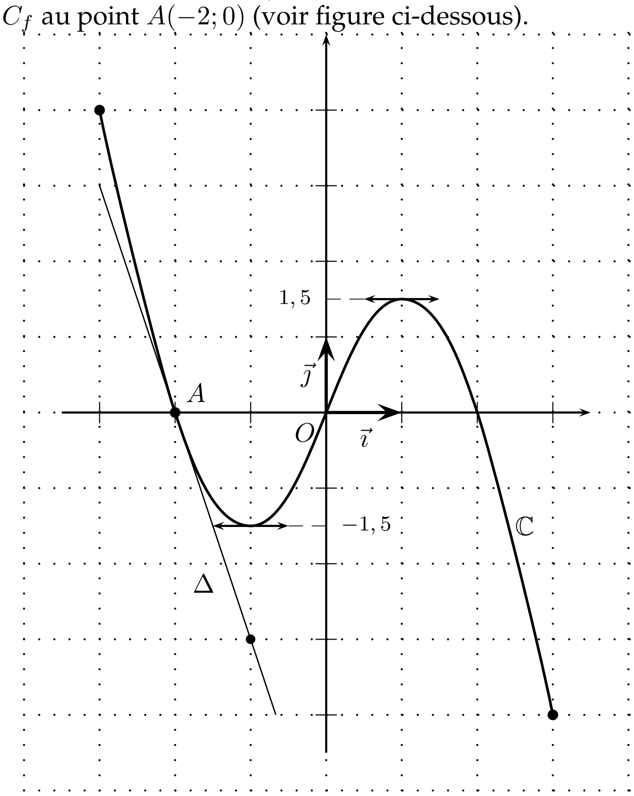
I lecture graphique

I.1 exercice 1

Dans le plan muni d'un repère orthonormé $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$, on considère la courbe C_f représentant une fonction f définie et dérivable sur $[-3; 3]$. La droite Δ est tangente à C_f au point $A(-2; 0)$ (voir figure ci-dessous).



1. Par lecture graphique, déterminer :
   (a) $f(1)$, $f(3)$, $f'(-2)$, $f'(1)$;
   (b) le signe de $f'(2)$ puis le signe de $f'(0)$.
2. Dresser le tableau de signe :
   (a) de f ; (b) de f'.
3. Dresser le tableau de variations de f.
4. (a) A quelles conditions nécessaires et suffisantes sur les nombres a et b, a-t-on :

   $$a \times b = 0\,?$$

   (b) Résoudre graphiquement l'équation :

   $$f(x) \times f'(x) = 0$$

5. A l'aide des tableaux de signe de la question 2, résoudre l'inéquation $f'(x) \times f(x) > 0$

I.2 exercice 2

Tracer une courbe vérifiant :

1. $f(-2) = 3$, $f(0) = -1$ et $f(3) = 2$
2. $f'(-2) = -\dfrac{1}{3}$,$f'(0) = 0$ et $f'(3) = \dfrac{3}{2}$

II Dérivation

II.1 exercice 1

Étudier les variations des fonctions suivantes sur I :

1. $\begin{cases} f(x) = \dfrac{4x^2 + x - 1}{x - 4} \\ I = \mathbb{R} \setminus \{4\} \end{cases}$ 2. $\begin{cases} g(x) = \sqrt{x^2 + x + 1} \\ I = \mathbb{R} \end{cases}$ 3. $\begin{cases} h(x) = \tan^3(x) \\ I = \left]-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\right[\end{cases}$

II.2 exercice 2

Soit h la fonction définie sur $[0; 4]$ par :

$$h(x) = x\sqrt{4x - x^2}$$

et C_h sa représentation graphique dans le plan muni du repère orthonormal $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ d'unité 2cm.

1. Justifier rigoureusement la dérivabilité de h sur $]0; 4[$ puis établir que :

$$\forall x \in]0; 4[\quad h'(x) = \frac{2x(3 - x)}{\sqrt{4x - x^2}}$$

2. (a) Déterminer l'équation réduite de d, la tangente à C_h en son point d'abscisse 2.
   (b) Etudier la position relative de C_h et d.
3. Etudier les variations de h.

II.3 exercice 3

les questions suivantes sont indépendantes

1. on donne $f(x) = \dfrac{x^2+5x-3}{x-2}$ pour $x \neq 2$ et $\mathcal{C}_f$ sa courbe représentative.

   Existe-t-il un ou plusieurs points de $\mathcal{C}_f$ en le(s)quel(s) la tangente soit parallèle à la droite (d) d'équation $y = 2x - 3$?
2. démontrer que l'équation $\cos(x) = -1 + \dfrac{1}{2}x$ admet une unique solution x_0 sur$[0, \pi]$
   et vérifier que $x_0 \in]1,7; 1,8[$
3. On pose $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x+2}$ pour tout $x \neq -2$
   (a) Déterminer une équation de la tangente (T) à la courbe C_f au point d'abscisse 1
   (b) Donner la position relative de (T) et de C_f sur $\mathbb{R} \setminus \{-2\}$

III Exercice Bilan

1. Soit g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par
$$g(x) = x^3 - 3x - 8$$
   (a) Etudier les variations de g.
   (b) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution que l'on notera α et dont on donnera un encadrement d'amplitude 10^{-2}.
   (c) En déduire le tableau de signe de $g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
2. Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^3+4x^2}{x^2-1}$.
   On appelle $\mathbb{C}$ la courbe représentative de f.
   (a) Déterminer D_f, l'ensemble de définition de f.
   (b) Etudier les variations de f puis dresser son tableau de variations complet.
   (c) Existe-t-il des points de $\mathbb{C}$ en lesquels la tangente à $\mathbb{C}$ est parallèle à $\Delta : y = x$?