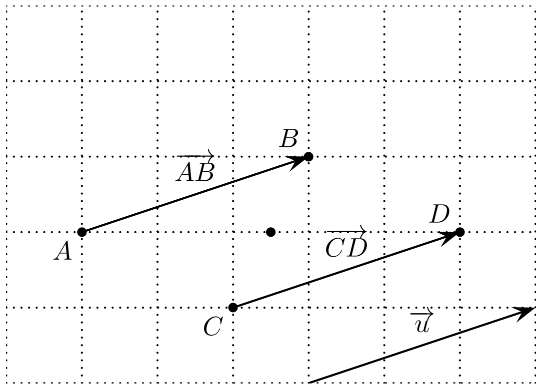
I Vecteurs et translations

I.1 Translation

Soit A et B deux points du plan.
À tout point C du plan, on associe le point D tel que $[AD]$ et $[BC]$ ont le même milieu.



L'application qui à tout point C du plan associe le point D tel que $[AD]$ et $[BC]$ ont même milieu est appelé translation qui transforme A en B.

I.2 Vecteurs

I.2.1 Définitions

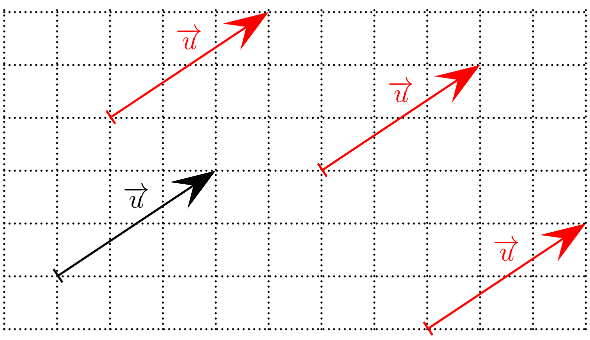
Concrètement dire que D est l'image de C par la translation qui transforme A en B, cela signifie que le trajet qui va de A vers B est le même que celui qui va de C vers D. Les notions de segment et de droite ne suffisant pas à décrire les trajets, il convient d'introduire une nouvelle notion : les vecteurs.

La translation qui transforme A en B est dite de vecteur associée $\overrightarrow{AB}$. Un vecteur $\overrightarrow{u}$ est un donc objet mathématique caractérisé par : une direction (ou "'inclinaison"), un sens de parcours, et une longueur (ou norme notée $||\overrightarrow{u}||$).

A votre avis, combien y-a-t'il de représentants d'un même vecteur ?
La réponse est illustrée dans par cette remarque :

Un vecteur $\overrightarrow{u}$ n'est pas fixe : on peut le dessiner n'importe où sur une feuille, c'est à dire que l'on peut choisir son origine où l'on veut.

Le vecteur $\overrightarrow{u}$ ci-dessous peut se placer n'importe où sur la feuille :

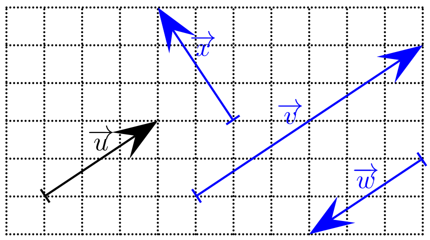


I.2.2 egalité de deux vecteurs

La translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$ est bien entendu la même que celle de vecteur $\overrightarrow{CD}$. On dit alors que les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux, puisqu'ils définissent la même translation. On note alors $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD} = \overrightarrow{u}$.

- Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si et seulement si ils ont la même direction (donnée par la droite (AB)), le même sens (celui de A vers B)
  et la même norme c'est à dire $AB = CD$.
- Deux vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont égaux si et seulement si le quadrilatère $ABDC$ est un parallèlogramme.

Sur la figure ci-dessous :



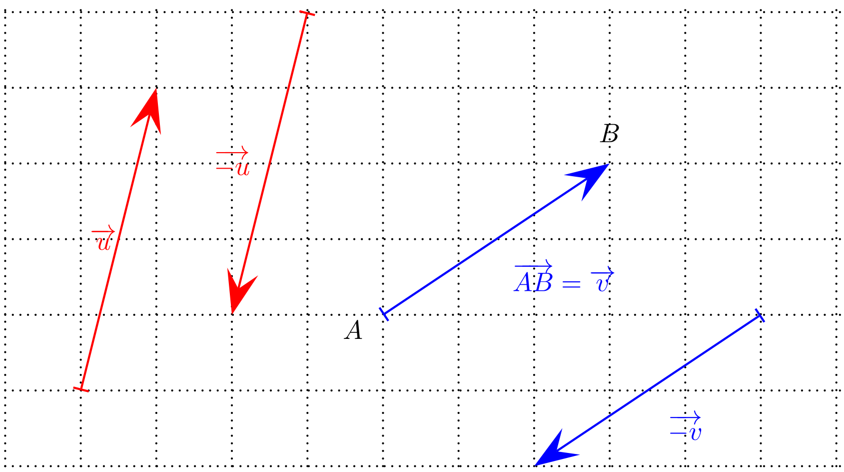
- Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{x}$ ne sont pas égaux, car ils n'ont pas la même direction.
- Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ne sont pas égaux, car ils n'ont pas la même norme.
- Les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{w}$ ne sont pas égaux, car ils n'ont pas le même sens.

Caractérisation des parallèlogrammes :
Le quadrilatère $ABDC$ est un parallèlogramme (*éventuellement aplati*) si et seulement si $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$

I.2.3 vecteurs opposée, vecteur nul

- Si A et B sont deux points tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{u}$.On dit que $\overrightarrow{AB}$ est un représentant du vecteur $\overrightarrow{u}$. Son origine est A et son extrémité est B.
- Le vecteur $\overrightarrow{BA}$ est l'opposé du vecteur $\overrightarrow{AB}$ et l'on note $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$. Il a même direction, même norme mais sens opposé à $\overrightarrow{AB}$;
- $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{AA} = \overrightarrow{BB} = \cdots$ est appelé le vecteur nul et est noté $\overrightarrow{0}$. Il n'a ni direction, ni sens.

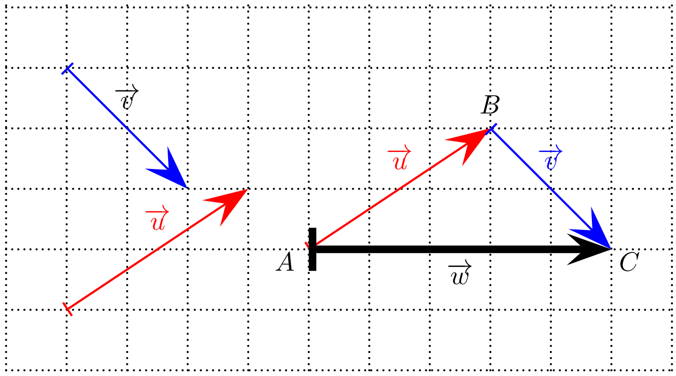
Ci dessous, on a dessiné les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{AB}$ ainsi que leurs opposés respectifs.



I.2.4 Somme de vecteurs

Soient $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs, on définit le vecteur $\overrightarrow{w}$ somme des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de la façon suivante :
Soit A un point du plan, on trace le représentant de $\overrightarrow{u}$ d'origine A : il a pour extrémité B.
Puis on trace le représentant de $\overrightarrow{v}$ d'origine B : il a pour extrémité C.
Le vecteur $\overrightarrow{AC}$ est un représentant du vecteur $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$. Par ailleurs on peut donc définir la somme de $\overrightarrow{u}$ et de $\overrightarrow{v}$ comme un vecteur $\overrightarrow{w}$ associé à la translation résultant de l'enchainement des translations des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$

Construction de $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ à partir d'un point A donné.



Pour tout point A, B et C du plan, on a : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

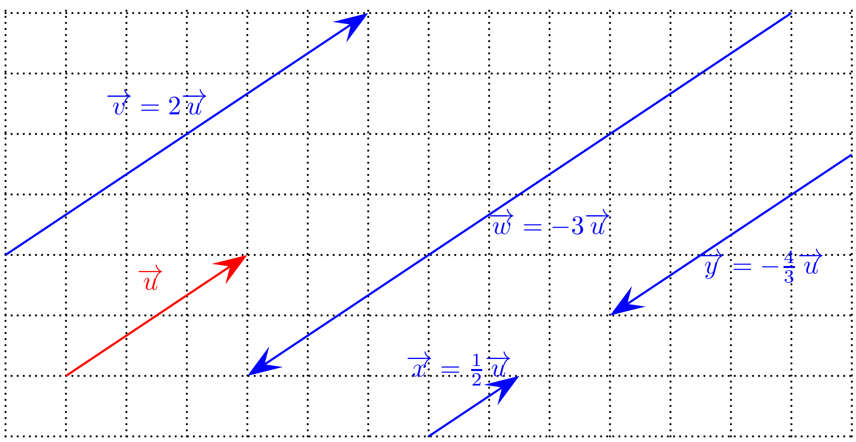
I.2.5 Opérations algèbriques

Quels que soient les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$ du plan, on a :
- $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$ (commutativité) ;
- $(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})$ (transitivité) ;
- $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{u}$.

I.2.6 Multiplication d'un vecteur par un nombre réel

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul et k un réel non nul, on définit le vecteur $\overrightarrow{v} = k\overrightarrow{u}$ par :
- Si $k > 0$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{u}$ ont même direction, même sens et la norme de $\overrightarrow{v}$ vaut k fois celle de $\overrightarrow{u}$;
- Si $k < 0$, $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{u}$ ont même direction, sont de sens opposé et la norme de $\overrightarrow{v}$ est égale à $|k|$ fois celle de $\overrightarrow{u}$.

Remarque : *Si* $\overrightarrow{u} = 0$ *ou* $k = 0$ *alors* $k\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$. Sur la figure ci-dessous :

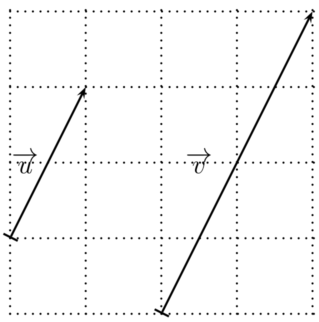


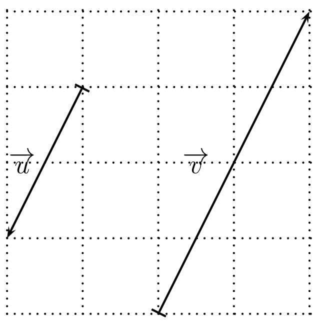
Quels que soient les vecteurs $\overrightarrow{u}$, $\overrightarrow{v}$ et les réels k et l , on a :
- $k(\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}) = k\overrightarrow{u}+k\overrightarrow{v}$ (distributivité par rapport aux vecteurs) ;
- $(k+l)\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{u}+l\overrightarrow{u}$ (distributivité par rapport aux réels) ;
- $k(\lambda\overrightarrow{u}) = (k\lambda\overrightarrow{u})$ (transitivité) ;
- $k\overrightarrow{u}\,\overrightarrow{0} \iff k=0$ ou $\overrightarrow{u}=\overrightarrow{0}$;

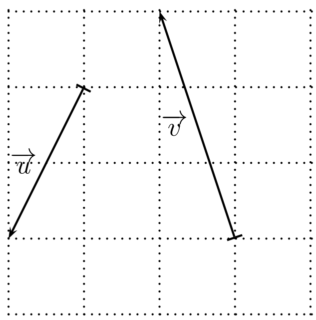
I.3 Colinéarité

I.3.1 une façon simple de l'expliquer :

Exprimer $\overrightarrow{u}$ en fonction de $\overrightarrow{v}$ dans chacun des cas suivants :







$\overrightarrow{u} = \ldots\overrightarrow{v}$ $\quad$ $\overrightarrow{u} = \ldots\overrightarrow{v}$ $\quad$ $\overrightarrow{u} = \ldots\overrightarrow{v}$

Ces exemples permettent de sentir intuitivement que :

- Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ ont la même direction, il existe un réel k tel que $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$
- Si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ n'ont pas la même direction, il n'existe pas de réel k tel que $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$

Il en découle la définition suivante :

Deux vecteurs sont dits colinéaires si et seulement si ils ont la même direction. Par convention, le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur

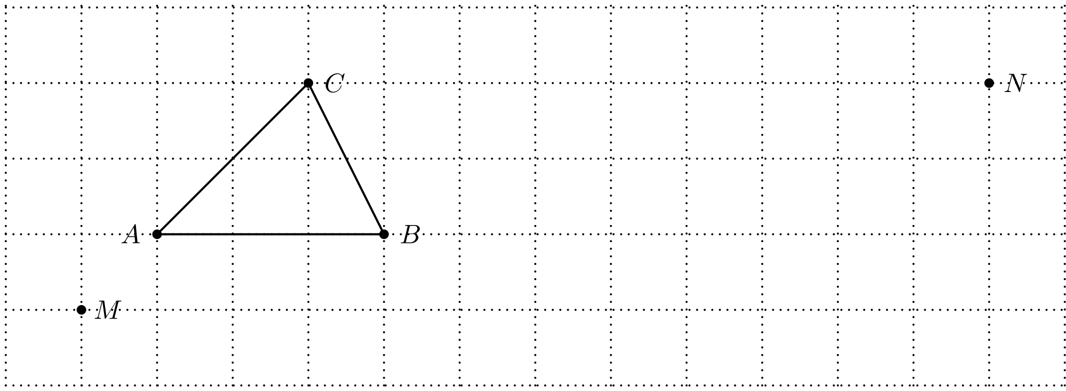
et la caractérisation suivante :

$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement s'il existe un réel k tel que $\overrightarrow{u} = k\overrightarrow{v}$

Conséquence géométrique :
Les droites (AB) et(CD) sont parallèles si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.
Les points A, B et C sont alignés si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.

Exemple :
ABC est un triangle. M et N sont les points tels que $\overrightarrow{CN} = 3\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM} = -\frac{1}{2}\overrightarrow{AC}$

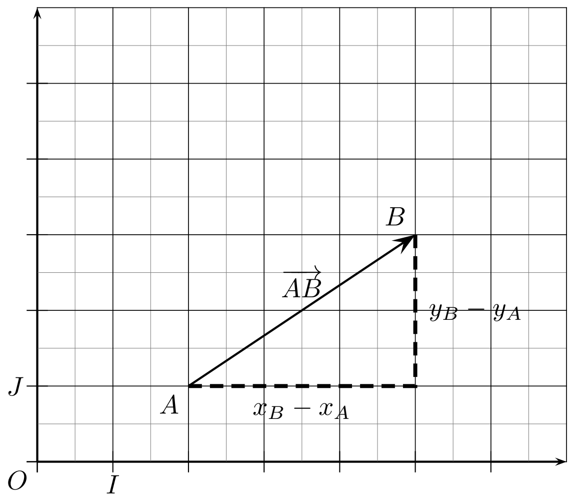
1. Placer les points M et N.
2. Exprimer $\overrightarrow{MB}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
3. Exprimer $\overrightarrow{MN}$ en fonction de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$.
4. Conclure sur l'alignement des points M,B et N.

1. 

2. $\overrightarrow{MB} = \overrightarrow{MB} + \overrightarrow{AB} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AB}$.
3. $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CN} = \frac{3}{2}\overrightarrow{AC} + 3\overrightarrow{AB}$
4. De 2. et 3., on conclut que $\overrightarrow{MN} = 3\overrightarrow{MB}$ donc les vecteurs $\overrightarrow{MN}$ et $\overrightarrow{MB}$ sont colinéaires donc les points M,B et N sont alignés.

II Vecteurs et coordonnées

II.1 Propriété

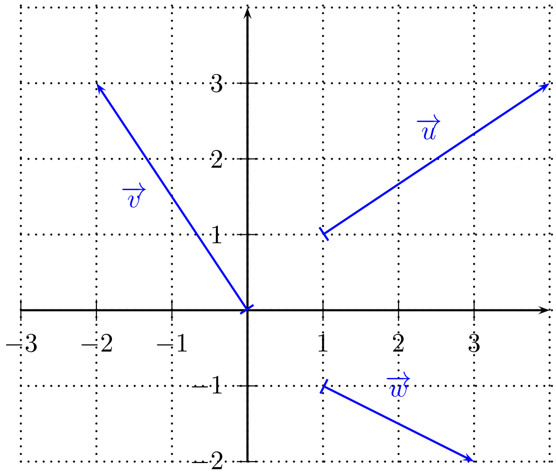


Dans le repère (O, I, J), on considère les points $A(x_A; y_A)$, et $B(x_B; y_B)$.
On a : $\overrightarrow{AB} = (x_B - x_A)\overrightarrow{OI} + (y_B - y_A)\overrightarrow{OJ}$. On a décomposé le vecteur $\overrightarrow{AB}$ en utilisant les vecteurs de **base** $\overrightarrow{OI} = \overrightarrow{i}$ et $\overrightarrow{OJ} = \overrightarrow{j}$. Le couple $(x_B - x_A, y_B - y_A)$ est appelé couple de coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans le repère (O, I, J). On note alors :

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$$

II.2 exemples

Lire les coordoonées des vecteurs de la figure suivante :



$\overrightarrow{u}$ a pour origine $A(1;1)$ et pour extrémité $B(4;3)$ donc ses coordonnées sont $\overrightarrow{u}\binom{4-1}{3-1}$ soit $\binom{3}{2}$, ce qui pouvait se lire directement sur le graphique. En faisant de même, on trouve $\overrightarrow{v}\binom{-2}{3}$ et $\overrightarrow{w}\binom{2}{-1}$.

II.3 propriétés

II.3.1 énoncés

Soient $\overrightarrow{u}\binom{x}{y}$, $\overrightarrow{v}\binom{x'}{y'}$ et k un réel

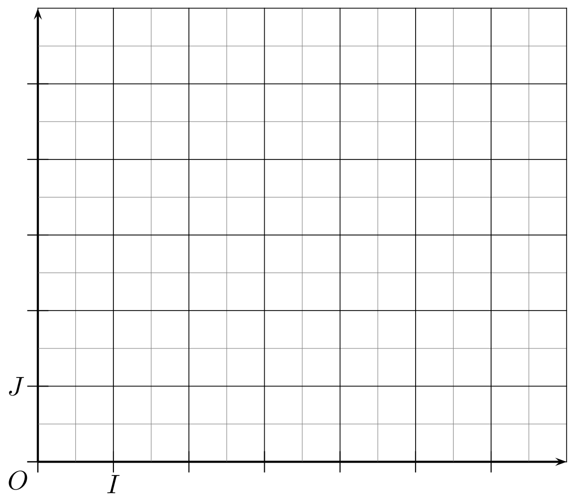
- **Egalité de deux vecteurs :**
  Deux vecteurs sont égaux si et seulement si leurs coordonnées sont égales
  $$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} \iff \begin{cases} x = x' \\ y = y' \end{cases}$$
- **Somme de deux vecteurs :**
  Le vecteur $\overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ a pour coordonnées :
  $$\overrightarrow{w}\begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$$
- **Produit d'un vecteur par un réel :**
  Le vecteur $\overrightarrow{w} = k\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées :
  $$\overrightarrow{w}\begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$$

II.3.2 exemples

Soient :

$$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}, \overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{w}\begin{pmatrix} 5x \\ x + y \end{pmatrix}$$

1. représenter $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$
2. Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$;
3. Déterminer les coordonnées de $-\overrightarrow{u}$;
4. Déterminer les coordonnées de $5\overrightarrow{v}$;
5. Déterminer les coordonnées de $-\overrightarrow{u} + 5\overrightarrow{v}$;
6. Déterminer x et y pour que $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{w}$.



II.4 colinéarité

II.4.1 propriété

Soient :

$$\overrightarrow{u}\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{v}\begin{pmatrix}x'\\y'\end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires si et seulement si :

$$xy' - x'y = 0$$

La quantité $xy' - yx'$ est appellé le déterminant des vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$

II.4.2 exemples

1. (a) Les vecteurs $\overrightarrow{u}\left(\begin{smallmatrix}6\\-9\end{smallmatrix}\right)$ et $\overrightarrow{v}\left(\begin{smallmatrix}-8\\12\end{smallmatrix}\right)$ sont-ils colinéaires ?

   (b) Les vecteurs $\overrightarrow{a}\left(\begin{smallmatrix}2\\-6\end{smallmatrix}\right)$ et $\overrightarrow{b}\left(\begin{smallmatrix}-3\\7\end{smallmatrix}\right)$ sont-ils colinéaires ?
2. Dans un repère (O, I, J), on a $A(4; 2)$, $B\left(3; \dfrac{7}{2}\right)$, $C\left(1; \dfrac{5}{2}\right)$ et $D\left(1; \dfrac{1}{2}\right)$.

   Démontrer que ABCD est un trapèze.
3. Dans le repère (O, I, J), on considère les points $A(-1; 5)$, $B(0; 3)$ et $C(2; -1)$.
   Montrer que les points A, B et C sont alignés.