Cours de TS

Giorgio Chuck VISCA

15 novembre 2015

SUITES

Table des matières

I représentation graphique **4**
I.1 Définition explicite . . . 4
I.2 Définition par récurrence . . . 5

II suites majorées,minorées,bornées **5**
II.1 Définitions . . . 5
II.2 Exercices . . . 5

III suites monotones,constantes **5**
III.1 Définitions . . . 5
III.2 Techniques d'étude de la monotonie . . . 6
III.3 Exercices . . . 6

IV Limite d'une suite **6**
IV.1 suites convergentes . . . 6
IV.1.1 un exemple numérique . . . 6
IV.1.2 Définition . . . 6
IV.1.3 les premiers résultats . . . 7
IV.2 Limite infinie . . . 8
IV.3 Définition . . . 8
IV.4 Résultats remarquables . . . 8
IV.5 Attention..... ! . . . 8
IV.6 Un autre résultat... . . . 8
IV.7 non convergence . . . 9
IV.8 Opération sur les limites . . . 9
IV.8.1 limite d'une somme . . . 9
IV.8.2 limite d'un produit . . . 9
IV.8.3 limite de l'inverse . . . 9
IV.8.4 limite d'un quotient . . . 9
IV.9 Les théorèmes de comparaisons . . . 9
IV.9.1 exercices . . . 10
IV.10 Théorème de la limite monotone . . . 10

V Rappels sur les suites arithmétiques et géométriques **10**
V.1 Suites arithmétiques . . . 10
V.2 Suites géométriques . . . 11
V.3 Convergence . . . 11

*Je rappelle à tout le public attentif de TS2, qu'une suite numérique est une application de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{R}$, notée en général $u : n \longmapsto u(n) = u_n$. Le terme de rang n, c'est à dire u_n : est appelé le **terme général** de la suite.*
Une suite peut être définie :
- *à l'aide d'une **formule explicite en fonction du rang** n, c'est à dire d'une relation du type : $u_n = f(n)$;*
- *ou à l'aide d'une formule ne donnant pas directement u_n mais où pour calculer u_n il est nécessaire de connaître tous ceux qui le précèdent : on dit qu'elle est alors définie à l'aide d'une **relation de récurrence**.*

Donnons des exemples pour être plus clair :

1. La suite définie par $u_n = n^2e^{-n}$ est ici définie de façon explicite : il n'est pas nécessaire de connaître tous les précédents pour par exemple calculer u_{15}.
2. La suite définie par la relation $u_{n+1} = 3u_n + 3$ est bien belle, mais on ne peut absolument pas l'exhiber si l'on ne connait pas u_0 .
   Par exemple $u_0 = 2$ permettra de calculer u_1, u_2,$\cdots$ u_n $\cdots\cdots$. Elle est définie par une relation de récurrence ! ainsi pour calculer u_{15} il nous faut (*pour l'instant*) connaître tous les précédents.
3. la suite bien connue sous le nom de suite "Fibonacci" *(et oui encore un champion du monde)*, par :
   $u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$, avec $u_0 = 0$ et $u_1 = 1$ va nous permettre de connaître u_2, u_3 etc ...... c'est aussi une relation de récurrence.
4. Un exemple complètement numérique : la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = 0.5\left(u_n + \dfrac{2}{u_n}\right)$, converge très très rapidement vers $\sqrt{2}$: vous constarez cela en calculant u_1, u_2,u_3 et u_4 et que vous laisserez sous forme fractionnaire, et comparerez la valeur de u_4 avec $\sqrt{2}$ .... tu verras public ! en attendant voici ce que donne le tableur ... pour $u_0 = 0.1$

n	$\mathbf{U_n}$
0	0,1
1	10,05
2	5,124502
3	2,757392
4	1,741358
5	1,444943
6	1,41454
7	$1,414214$
8	1,414214
9	1,414214
10	1,414214
11	1,414214
12	1,414214
13	1,414214
14	1,414214
15	1,414214
16	1,414214
17	1,414214

5. Un exemple encore : une suite définie de façon explicite : $u_n = \left(1 + \dfrac{1}{n}\right)^n$, pour $n > 0$. Regardez donc, et concluez ...

n	Un
100	2,704814
200	2,711517

n	Un
2000	2,717603
2500	2,717738

300	2,713765
400	2,714892
500	2,715569
600	2,71602
700	2,716343
800	2,716585
900	2,716773
1000	2,716924
1100	2,717047
1200	2,71715
1300	2,717237
1400	2,717312
1500	2,717376

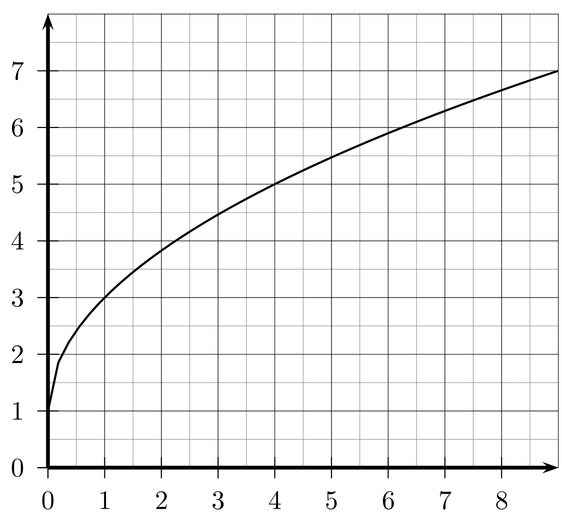
3000	2,717829
3500	2,717894
4000	2,717942
4500	2,71798
5000	2,71801
5500	2,718035
6000	2,718055
6500	2,718073
7000	2,718088
7500	2,718101
8000	2,718112
8500	2,718122
9000	2,718131

I représentation graphique

I.1 Définition explicite

Soit $u_n = f(n)$, il faut alors disposer de la la représentation graphique de la fonction f sur $]0; +\infty[$.

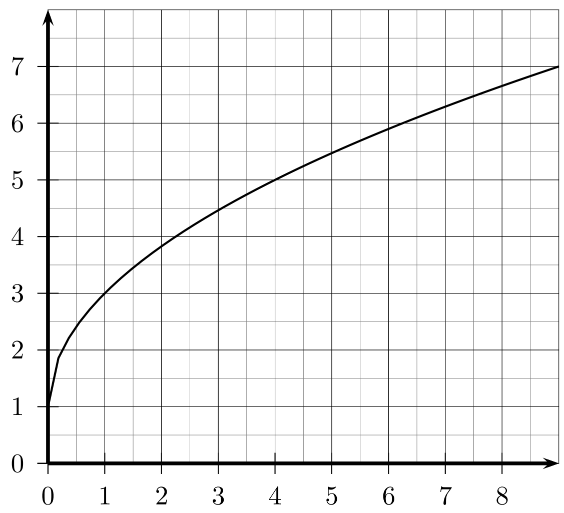
Exemple :
$u_n = 2\sqrt{n} + 1$; ici f est définie par $f(x) = 2\sqrt{x} + 1$ sur $]0; +\infty[$. Placer les neuf premiers termes de la suite.

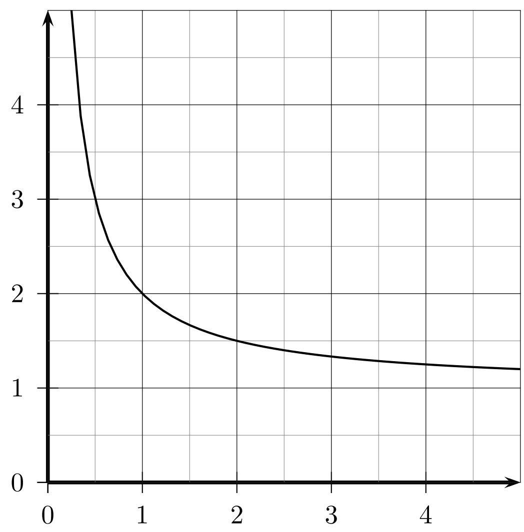


I.2 Définition par récurrence

$$\begin{cases} u_0 = 1 \\ u_{n+1} = 2\sqrt{u_n} + 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} u_0 = 0,5 \\ u_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{u_n} \end{cases}$$

L'idée
Lorsque $u_{n+1} = f(u_n)$, à l'aide de la courbe C_f. On peut visualiser $u_1 = f(u_0)$ sur (Oy) ; l'idée est de reporter u_1 sur (ox) **à l'aide de la droite d'équation** $\mathbf{y} = \mathbf{x}$.
On recommence alors avec $u_2 = f(u_1)$, etc...





II suites majorées,minorées,bornées

II.1 Définitions

Minoration, majoration

1. Une suite est **majorée**,s'il existe un réel M tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant M$
2. Une suite est **minorée** , s'il existe un réel m tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant m$
3. Une suite est **bornée** si elle est à la fois majorée et minorée

II.2 Exercices

Pour démontrer de telles choses, soit on fait un raisonnement direct (adapté aux suites définies de façon explicite), soit un raisonnement par récurrence (adapté aux suites définies à l'aide d'une relation de récurrence)

1. Démontrer que la suite définie par $u_n = \frac{2}{n^2+1}$ est minorée par 0 et majorée par 2
2. Démontrer que la suite définie par $u_0 = 0$ et $u_{n+1} = \sqrt{u_n + 12}$ est majorée par 4

III suites monotones,constantes

III.1 Définitions

monotonie

1. une suite (u) est **croissante** si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$
2. une suite (u) est **décroissante** si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} - u_n \leqslant 0$
3. une suite est dite **constante ou stationnaire** si $\forall n \in \mathbb{N}$, $u_{n+1} = u_n$

III.2 Techniques d'étude de la monotonie

1. On étudie le signe de la différence $u_{n+1} - u_n$
2. On étudie le rapport $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, et on le compare à 1 ,si $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} \geq 1$ alors (u) est croissante.. *mais cette méthode n'est valable que si les termes de la suite (u) sont positifs.....*
3. si on a $u_n = f(n)$ c'est à dire si l'on connait explicitement u_n en fonction de n , on étudie si cela est possible les variations de f sur $\mathbb{R}_+$, ainsi si f est croissante il en sera de même pour (u).....

REMARQUE : Une suite peut être croissante ,décroissante ,stationnaire à partir d'un certain rang n_0

III.3 Exercices

Etudier la monotonie des suites suivantes :

1.) $u_n = \dfrac{n}{n+1}$, $n \in \mathbb{N}$	$v_n = 1 + \dfrac{1}{n}$, $n \in \mathbb{N}^*$
2.) $u_n = ne^{-n}$, $n \in \mathbb{N}$	$v_n = n - 1 + e^n$, $n \in \mathbb{N}$
3.) $u_n = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + ... + \frac{1}{n!}$, $n \in \mathbb{N}$	$v_n = n2^n$, $n \in \mathbb{N}$
4.) $u_{n+1} = u_n + n^2 + 3n + 1$, $u_0 \in \mathbb{R}$	$v_{n+1} = v_n + (-1)^n$, $v_o \in \mathbb{R}$

✂ ....

IV Limite d'une suite

IV.1 suites convergentes

IV.1.1 un exemple numérique

On considère la suite (u) définie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ par : $u_n = 1 + \dfrac{1}{n^2}$
bien évidemment la limite de la suite (u) est 1.... On choisit un $\varepsilon > 0$ très petit par exemple $\varepsilon = 0.001$, problème : existe t'il oui ou non un entier $N_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tel que pour $n > N_\varepsilon$ on ait $u_n \in]0.999; 1.001[$?
et bien,si un tel entier existe quel que soit le choix de $\varepsilon > 0$, cela prouve rigoureusement que la suite converge vers 1..........
<u>PROBLEME :</u>

DÉMONTRER QUE : $\forall \varepsilon > 0$, IL EXISTE UN ENTIER N_ε À PARTIR DUQUEL TOUS LES TERMES DE LA SUITE SOIENT DANS L'INTERVALLE : $]1 - \varepsilon; 1 + \varepsilon[$.

IV.1.2 Définition

Définition

on dit qu'une suite (u) converge vers $l \in \mathbb{R}$ si :
$\forall \varepsilon > 0$ il existe un entier N_ε à partir duquel tous les termes de la suite soient dans l'intervalle centré en l : $]l - \varepsilon; l + \varepsilon[$, c.a.d tel que $|u_n - l| < \varepsilon$

REMARQUE : *de façon bien plus claire :* $\forall \varepsilon > 0, \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N}$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $n > N_\varepsilon \Rightarrow |u_n - l| < \varepsilon$
(ben oui c'est l'écriture rigoureuse.......AH les maths modernes....)

UNE DÉFINITION PLUS *manipulable* DE LA CONVERGENCE :

Une suite (u_n) converge vers un réel l si tout intervalle ouvert contenant l contient tous les termes de la suite à partir d'un certain rang......

Unicité

Si une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers un réel l, l est alors unique.
le réel l est appelé la limite de la suite et on note :

$$\lim_{n\to+\infty} u_n = l$$

Confinement

Toute suite convergente est bornée.

Attention la réciproque est fausse, pour cela il suffit de considérer la suite $u_n = (-1)^n$. Elle est bien bornée mais elle ne converge pas car les termes de rangs pairs sont égaux à 1 et ceux de rangs impairs sont égaux à -1.

✂..

IV.1.3 les premiers résultats

suites de références

On retiendra les résultats remarquables suivants :

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} = 0, \quad \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^p} = 0 \text{ avec } p \in \mathbb{N}^*, \quad \lim_{n\to+\infty} e^{-n} = 0$$

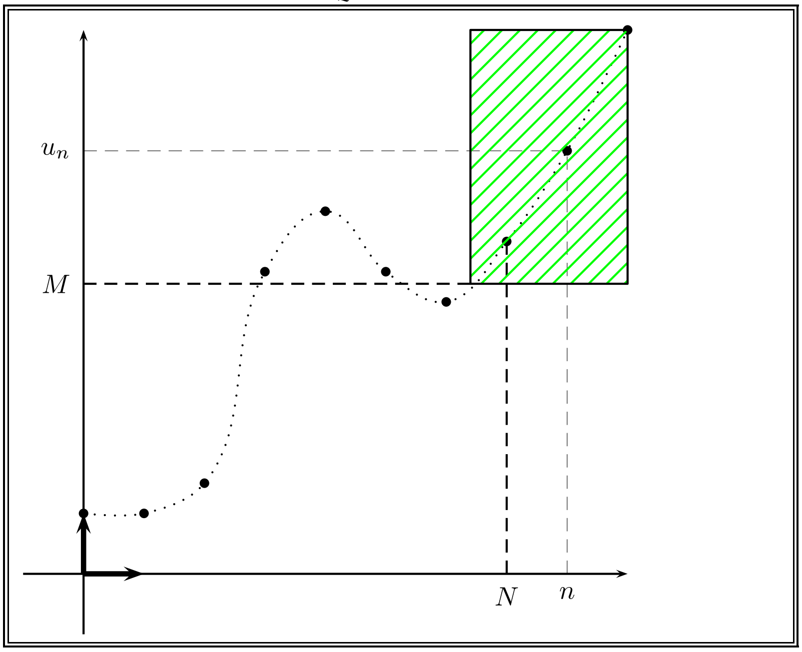
IV.2 Limite infinie

IV.3 Définition

Définition

Une suite tend vers $+\infty$ *(resp vers $-\infty$)*si pour tout $M > 0$ *(resp $M < 0$)* , il existe un entier N à partir duquel tous les termes de la suite soient plus grand *(resp plus petit)* que M ce qui se traduit par
$\forall M > 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n > N \Rightarrow u_n > M$ c.a.d $u_n \in]M; +\infty[$
(resp $\forall M < 0$ il existe $N \in \mathbb{N}$ tel que : $\forall n \in \mathbb{N}$, $n > N \Rightarrow u_n > M$ c.a.d $u_n \in]-\infty; M[$)

INTERPRÉTATION GRAPHIQUE :



`sur cette figure ,les termes de la suite` (u) `considérée sont représentés par des points ,et la fonction tracée est la fonction` f `définie sur` $[0; +\infty[$ `par :` $u_n = f(n)$`.....`
`pour le` M `choisit , on a pour tout` $n \geq N$ `,` $u_n > M$

DE FAÇON PLUS SIMPLE , on peut choisir M **aussi grand que l'on veut** il existera toujours un indice à partir duquel tous les termes de la suite seront plus grands que M....

IV.4 Résultats remarquables

Suites de références

On retiendra les résultats suivants :

$$\lim_{n\to+\infty} \sqrt{n} = +\infty, \quad \lim_{n\to+\infty} n^p = +\infty \text{ avec } p \in \mathbb{N}^*, \quad \lim_{n\to+\infty} e^n = +\infty$$

IV.5 Attention.....!

une suite qui tend vers $+\infty$ n'est pas forcément croissante

<u>REMARQUE :</u> *ceci étant bien entendu aussi valable pour les fonctions*

<u>Exercice :</u> donner un exemple de suite qui tend vers $+\infty$ sans être croissante (*un dessin est accepté..*)
✂ ....

IV.6 Un autre résultat...

Toute suite croissante non majorée tend vers plus l'infini

Exercice : Démontrer ce résultat

✂ ....

IV.7 non convergence

Une suite qui ne converge pas est dite **DIVERGENTE**

REMARQUE : Il y a différents types de divergences :

a) les suites qui tendent vers $+\infty$ ou $-\infty$
b) les suites qui n'admettent pas de limites

Exercice : donner un exemple dans chaque cas

✂ ....

IV.8 Opération sur les limites

IV.8.1 limite d'une somme

$\lim u_n$	l	l	l	$-\infty$	$+\infty$	$-\infty$
$\lim v_n$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$\lim(u_n + v_n)$						

IV.8.2 limite d'un produit

$\lim u_n$	l	$l > 0$	$l > 0$	$+\infty$	$-\infty$	0
$\lim v_n$	l'	$+\infty$	$-\infty$	$+\infty$	$+\infty$	∞
$\lim(u_n \times v_n)$						

IV.8.3 limite de l'inverse

$\lim u_n$	$l \neq 0$	$+\infty$	$-\infty$	0^-	0^+
$\lim 1/u_n$					

IV.8.4 limite d'un quotient

$\lim u_n$	l	l	0	∞	0	∞
$\lim v_n$	$l' \neq 0$	∞	∞	0	0	∞
$\lim \frac{u_n}{v_n}$						

✂ ....

IV.9 Les théorèmes de comparaisons

Compatibilité avec l'ordre

Soient (u_n) et (v_n) deux suites de limites respectives l et l' et vérifiant, l'inégalité $u_n \leq v_n$ pour tout entier naturel $n \geq n_0$.
On dispose alors de l'inégalité $l \leq l'$.

ATTENTION : Par passage à la limite, les inégalités au sens strict ne se conservent pas : en effet on a $\dfrac{1}{n} > 0$ pour tout n qui passe au sens large en passant à la limite. Sinon on écrirait que $0 > 0$ qui est absurde ..

Théorèmes de comparaisons

Le théorème 1 :
Soient (u) et (v) deux suites telles qu'a partir d'un certain rang n_0 on ait : $u_n \geqslant v_n$, avec $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = +\infty$, Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$.

Le théorème 2 :
Soient (u) et (v) deux suites telles qu'a partir d'un certain rang n_0 on ait : $u_n \leqslant v_n$, avec $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = -\infty$, Alors $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = -\infty$.

Le théorème des gendarmes :
Soient (u); (v) et (w) trois suites telles qu'a partir d'un certain rang n_0 on ait : $v_n \leq u_n \leq w_n$ et telles que (v) et (w) convergent vers l , alors (u) converge aussi vers l

IV.9.1 exercices

1. Etudier la convergence des suites définies par :
   (a) $u_n = \frac{n^2+3}{-3n+4}$ pour $n \in \mathbb{N}$
   (b) $u_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$, pour $n \in \mathbb{N}$
   (c) $u_n = n + 1 + e^{-3n}$, pour $n \in \mathbb{N}$
2. Démontrer que la suite définie sur $\mathbb{N}^*$ par : $u_n = \dfrac{1}{n}\sin(n^2)$ est convergente.
3. Etudier la limite des suites (v) et (w) définies pour tout n dans $\mathbb{N}$ par : $v_n = n + \cos(3n+1)$, et $w_n = -n^2 - n + \sin(n)$

✂ ....

IV.10 Théorème de la limite monotone

-TOUTE SUITE CROISSANTE ET MAJORÉE CONVERGE
-TOUTE SUITE DÉCROISSANTE ET MINORÉE CONVERGE

REMARQUE : `Dans un cas comme dans l'autre , on ne sait pas à priori vers quoi cette suite converge..`

V Rappels sur les suites arithmétiques et géométriques

V.1 Suites arithmétiques

Soit r un réel donné.Une suite (u_n) est dite arithmétique de raison r lorsque $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} - u_n = r$.
On a alors $u_n = u_0 + nr$ et $u_0 + u_1 + ... + u_n = (n+1)\dfrac{u_0 + u_n}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

REMARQUES :

1. on a en outre
$$\boxed{1 + 2 + 3 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}}$$
2. si p est un entier donné : $\forall n \geq p$, $u_n = u_p + r(n-p)$
3. on peut retenir d'une façon plus générale "**la somme des termes d'une suite arithmétique est égale à la demi-somme des extrêmes multipliée par le nombre de termes**"

V.2 Suites géométriques

Soit q un réel donné.Une suite (u_n) est dite géométrique de raison $q \neq 0$ lorsque $\forall n \in \mathbb{N}, u_{n+1} = qu_n$.
On a alors $u_n = u_0 q^n$ et $u_0 + u_1 + ... + u_n = u_0 \dfrac{1-q^{n+1}}{1-q}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

REMARQUES :

1. on a en outre,pour $q \neq 1$:

$$\boxed{1 + q + q^2 + ... + q^n = \frac{1-q^{n+1}}{1-q}}$$

2. on a : soit p un entier naturel donné , $\forall n \geq p$, $u_n = u_p q^{n-p}$

V.3 Convergence

- $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = +\infty \quad si \quad q > 1$
- $\lim\limits_{n \to +\infty} q^n = 0 \quad si \quad |q| < 1$

REMARQUES :

– Si $q = -1$, alors $(-1)^n$ n'a pas de limite et diverge en restant bornée
– Si $q < -1$, alors q^n n'a pas de limite et diverge en étant ni majorée ni minorée. En effet les termes de rangs pairs tendent vers $+\infty$ mais ceux de rangs impairs tendent vers $-\infty$. Donc un exemple de suite ni majorée ni minorée serait donc par exemple $u_n = (-1.5)^n$ ..

✂ ....