Première partie

Rappels de seconde : vocabulaire

I Vocabulaire des événements

éventualité

Chaque résultat possible et prévisible d'une expérience aléatoire est appelé éventualité.

- Lancer un dé à six faces : « obtenir un 2 » est une éventualité de cette expérience aléatoire,
- tirage des six numéros gagnants du Loto : « obtenir la combinaison « $2 - 5 - 17 - 23 - 36 - 41$ » est une éventualité de cette expérience aléatoire.

univers

L'ensemble formé par les éventualités est appelé univers, il est très souvent noté Ω.

- Lancer d'une pièce de monnaie : $\Omega = \{$ pile ; face $\}$,
- lancer un dé à six faces : $\Omega = \{ 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6 \}$.

évènement

- Un événement de l'expérience aléatoire est une partie quelconque de l'univers,
- un événement ne comprenant qu'une seule éventualité est un événement élémentaire.

- A = « obtenir un 5 » est un événement élémentaire que l'on peut noter $A = \{ 5 \}$,
- B = « obtenir un numéro pair » est un événement que l'on peut noter $B = \{ 2 ; 4 ; 6 \}$.

évènements particuliers

- L'événement qui ne contient aucune éventualité est l'événement impossible, noté $\varnothing$,
- l'événement composé de toutes les éventualités est appelé événement certain.

Lancer d'un dé à six faces :

- Tirage des six numéros gagnants du loto : « obtenir la combinaison $3 - 25 - 38 - 59 - 67 - 91$ » est un événement impossible (les numéros vont de 1 à 49),
- lancer d'un dé à six faces : « obtenir un nombre positif » est un événement certain.

contraire

Pour tout événement A il existe un événement noté $\overline{A}$ et appelé événement contraire de A, qui est composé des éléments de Ω qui ne sont pas dans A.

- Lancer d'une pièce de monnaie : si $A = \{$ pile $\}$ alors son événement contraire est $\overline{A} = \{$ face $\}$,
- Lancer d'un dé à six faces : si A est l'événement « obtenir un nombre inférieur ou égal à 4 », alors son événement
  contraire $\overline{A}$ est l'événement « obtenir 5 ou 6 ».

II Intersection et réunion d'événements

intersection et réunion

Soit A et B deux événements de Ω.

- Intersection d'événements : l'événement constitué des éventualités appartenant à A et à B est noté $A \cap B$ (se lit « A inter B » ou « A et B »),
- Réunion d'événements : l'événement constitué des éventualités appartenant à A ou à B est noté $A \cup B$ (se lit A et de B ou « A union B » ou « A ou B »).

Si $A \cap B = \varnothing$, on dit que les événements sont disjoints ou incompatibles.

On considère un jeu de 52 cartes. On note A l'événement « obtenir une carte paire » et B l'événement « obtenir une carte de valeur inférieure strictement à six ».

- $A \cap B =$ « obtenir une carte paire et inférieures strictement à six » : $A \cap B = \{\, 2\ ;\ 4 \,\}$,
- $A \cup B =$ « obtenir une carte paire ou inférieure strictement à six » : $A \cup B = \{\, 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 4\ ;\ 5\ ;\ 6\ ;\ 8\ ;\ 10 \,\}$.

III Calcul de probabilités

calcul des probabilités

La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constitue.

On dit qu'il y a équiprobabilité lorsque tous les événements élémentaires ont la même probabilité, dans ce cas, on a : $P(A) = \dfrac{\text{nombre d'éléments de } A}{\text{nombre d'éléments de } \Omega} = \dfrac{\text{Card}(A)}{\text{Card}(\Omega)}$.

Dans un exercice, pour signifier qu'on est dans une situation d'équiprobabilité on a généralement dans l'énoncé un expression du type :

– on lance un dé non pipé,
– dans une urne, il y a des boules indiscernables au toucher,
– on rencontre au hasard une personne parmi . . .

On lance un dé équilibré à six faces.

On considère les événements A : « obtenir un chiffre pair » et l'événement B : « obtenir un diviseur de six ».

- Le dé est équilibré donc on est dans une situation d'équiprobabilité,
- $A = \{\, 2\ ;\ 4\ ;\ 6 \,\}$ donc, $P(A) = \dfrac{3}{6} = \dfrac{1}{2}$
- $B = \{\, 1\ ;\ 2\ ;\ 3\ ;\ 6 \,\}$ donc, $P(B) = \dfrac{4}{6} = \dfrac{2}{3}$.

propriétés

Soit A et B deux événements, on a les propriétés suivantes :

- $P(\varnothing) = 0$
- $P(\Omega) = 1$
- $0 \leqslant P(A) \leqslant 1$
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$
- $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

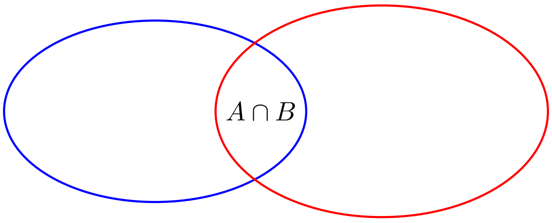
On considère l'ensemble E des entiers de 1 à 20. On choisit l'un de ces nombres au hasard.

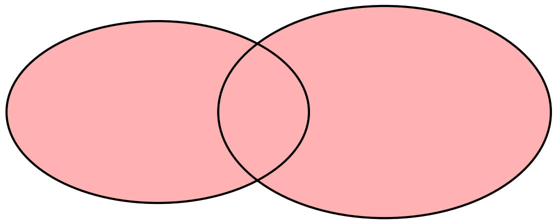
A est l'événement : « le nombre est multiple de 3 » et B est l'événement : « le nombre est multiple de 2 ».

- $P(A) = \dfrac{6}{20} = \dfrac{3}{10} = 0,3.$
- $P(\overline{A}) = 1 - P(A) = 1 - \dfrac{3}{10} = \dfrac{7}{10} = 0,7.$
- $P(B) = \dfrac{10}{20} = \dfrac{1}{2} = 0,5.$
- $P(A \cap B) = \dfrac{3}{20} = 0,15.$
- $P(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B) = \dfrac{6}{20} + \dfrac{10}{20} - \dfrac{3}{20} = \dfrac{13}{20} = 0,65.$

IV Représentation des événements

Diagrammes ou patates
Représentation graphique de l'intersection et de la réunion d'événements :



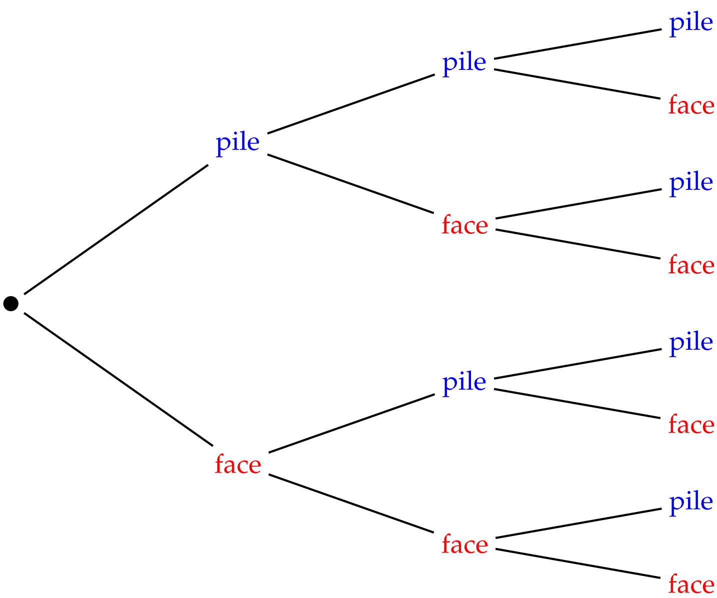


$A \cup B$

Tableaux
On jette deux dés à quatre faces (tétraèdre régulier) et on calcule la produit obtenu :

	1	**2**	**3**	**4**
1	1	2	3	4
2	2	4	6	8
3	3	6	9	12
4	4	8	12	16

Arbres
On lance une pièce de monnaie trois fois de suite, on peut schématiser cette expérience par un arbre :



V les exercices

V.1 exercice 1

On tire au hasard une carte dans un jeu de 32 cartes.

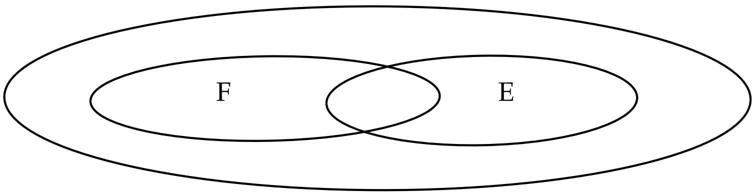
1. Quelle est la probabilité de tirer un trèfle ?
2. Quelle est la probabilité de tirer une carte noire ?
3. Quelle est la probabilité de ne pas tirer un carreau ?
4. Quelle est la probabilité de tirer une figure (roi, dame ou valet) ?
5. Quelle est la probabilité de tirer un as ?
6. Quelle est la probabilité de ne pas tirer un valet noir ?

V.2 exercice 2

Une campagne de prévention routière s'intéresse aux défauts constatés sur le freinage et sur l'éclairage de 400 véhicules :

– 60 des 400 véhicules présentent un défaut de freinage.
– 140 des 400 véhicules présentent un défaut d'éclairage.
– 45 véhicules présentent à la fois un défaut de freinage et un défaut d'éclairage.

1. Recopier puis compléter le diagramme de Venn ci-dessous avec des nombres pour représenter la situation.



2. On choisit un véhicule au hasard parmi ceux qui ont été examinés. Quelle est la probabilité que :
   (a) le véhicule présente un défaut de freinage mais pas de défaut d'éclairage ?
   (b) le véhicule présente un défaut d'éclairage mais pas de défaut de freinage ?
   (c) le véhicule ne présente aucun des deux défauts ?
   (d) le véhicule présente au moins un des deux défauts ?

V.3 exercice 3

Une urne contient 4 boules : deux rouges, une verte et une jaune, indiscernables au toucher.

On tire au hasard une boule de cette urne. Après avoir noté la couleur de la boule obtenue on la re place dans l'urne et on procède à un second tirage. On note alors à nouveau la couleur obtenue.

1. Dessiner l'arbre correspondant à cette expérience.
2. Soit E l'événement « les deux boules tirées sont rouges » et F l'événement « une seule des deux boules tirées est rouge ». À l'aide de l'arbre, calculer les probabilités $p(E)$ et $p(F)$.
3. Définir par une phrase l'événement $G = E \cup F$. Calculer $p(G)$.
4. À l'aide de $p(G)$, calculer $p(H)$ où H est l'événement « aucune des deux boules tirées n'est rouge ».
5. Les boules de l'urne portent chacune un numéro : les rouges le numéro 1, la verte le numéro 2, la jaune le numéro 4. On s'intéresse maintenant aux numéros obtenus lors des tirages.
   On appelle S la somme des numéros obtenus après le tirage des deux boules. Quelle est la probabilité que S soit supérieure ou égale à 4 ? (on pourra faire apparaître les différentes sommes à l'extrémité des branches de l'arbre de la question 1).

V.4 exercice 4

Une enquête a été réalisée auprès des consommateurs de yaourts ; 250 personnes ont été interrogées.

1. Parmi les personnes interrogées :
   - 36 % achètent des yaourts à la ferme ;
   - trois dixièmes achètent des yaourts moins d'une fois par semaine ;
   - les trois cinquièmes de ceux qui achètent des yaourts moins d'une fois par semaine le font à l'hypermarché.

   Aucun des clients n'achète à la fois à la ferme et à l'hypermarché. Recopier et compléter le tableau ci-dessous (aucune justification n'est demandée).

	Achètent une fois par semaine ou plus	Achètent moins d'une fois par semaine	Total
Achètent à la ferme	60		
Achètent à l'hypermarché			
Total			250

   Les probabilités demandées dans la question 2 ci-dessous seront données sous forme décimale.

2. On choisit au hasard une personne parmi les 250 acheteurs, toutes les personnes ayant la même probabilité d'être choisies.

   On considère les événements :
   - A : « La personne choisie achète des yaourts moins d'une fois par semaine » ;
   - B : « La personne choisie achète des yaourts à l'hypermarché ».

   (a) Calculer les probabilités $p(A)$ et $p(B)$.

   (b) Calculer $p(A \cap B)$, puis en déduire $p(A \cup B)$.

V.5 exercice 5

Voici les résultats d'un sondage effectué en 1999 auprès de 2 000 personnes, à propos d'Internet :
- 40% des personnes interrogées déclarent être intéressées par Internet,
- 35% des personnes interrogées ont moins de 30 ans et, parmi celles-ci, quatre cinquièmes déclarent être intéressées par Internet,
- 30% des personnes interrogées ont plus de 60 ans et, parmi celles-ci, 85% ne sont pas intéressées par Internet.

1. Reproduire et compléter le tableau suivant :

	intéressées par Internet	non intéressées par internet	**total**
moins de 30 ans			
de 30 à 60 ans			
plus de 60 ans			
total			**2 000**

2. On choisit au hasard une personne parmi les 2 000 interrogées. On suppose que toutes les personnes ont la même probabilité d'être choisies. On considère les événements :

   A : « *la personne interrogée a moins de 30 ans* »,

   B : « *la personne interrogée est intéressée par Internet* ».

   (a) Calculer les probabilités $P(A)$ et $P(B)$.

(b) Définir par une phrase l'événement $\overline{A}$ puis calculer $P(\overline{A})$.

(c) Définir par une phrase l'événement $A \cap B$ puis calculer $P(A \cap B)$. En déduire $P(A \cup B)$.

3. On sait maintenant que la personne interrogée est intéressée par Internet.
Quelle est la probabilité qu'elle ait plus de 30 ans ?

Deuxième partie

Probabilité et conditionnement

VI Un exemple pour comprendre

Dans une assemblée , 40% sont des hommes .

- parmis les hommes 60% pensent que Giorgio est un dieu.
- parmis les femmes (*mais pas pour les même raisons...... :)*) 80% pensent que Giorgio est un dieu.

On peut alors (*avant de poser des questions......*) complèter le tableau d'effectifs suivant en supposant que l'assemblée contient 4000 personnes :

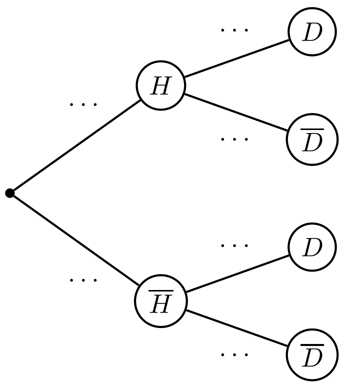
	H	$\overline{H}$	
D			
$\overline{D}$			

✂ ....

Arbre pondéré

On peut répondre aux mêmes questions à l'aide d'un arbre *pondéré*, c'est à dire un arbre dont chaque branche est marquée de la probabilité (du $poids$) correspondant.

On vérifie que la somme des probabilités de chaque « ramification » est égale à 1.



✂ ....

Ceci nous conduit tout naturellement à la définition suivante

VII Les formules

probabilité conditionnelle

Soient A et B deux événements d'un espace probabilisé muni d'une probabilité $\mathbb{P}$, avec $\mathbb{P}(B) \neq 0$. **La probabilité de *A* sachant *B*** est définie par

$$\mathbb{P}_B(A) = \frac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(B)}$$

L'application $\mathbb{P}_B$ est bien une probabilité, qu'on appellera **probabilité conditionnelle sachant *B***.

REMARQUE : on a bien entendu $\mathbb{P}_A(B) = \dfrac{\mathbb{P}(A \cap B)}{\mathbb{P}(A)}$

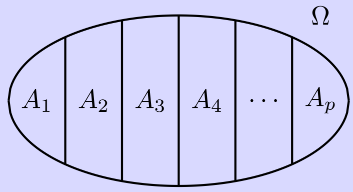
VIII Formule des probabilités totales

VIII.1 Partition

Partition de l'univers

Des événements A_1, A_2, …, A_p de l'univers Ω constituent une *partition* de Ω si elles sont deux à deux incompatibles et si leur réunion est Ω.
Ainsi :

- Pour tous i et j de $\{1\,;\,\dots\,;\,p\}$: $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \varnothing$;
- $\displaystyle\bigcup_{i=1}^{p} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_p = \Omega$.



Par exemple, séparer une classe en un groupe fille et un groupe garçon permet de réaliser une partition de la classe. Séparer une classe en un groupe fille, un groupe garçon et un groupe d'abonnés au *"Comment devenir un dieu en une leçon"* ne permet pas de réaliser une partition car certains élèves peuvent appartenir à deux groupes en même temps.

formule des probabilités totales

Supposons donc qu'il existe une partition A_1, A_2, ... , A_n de Ω, alors

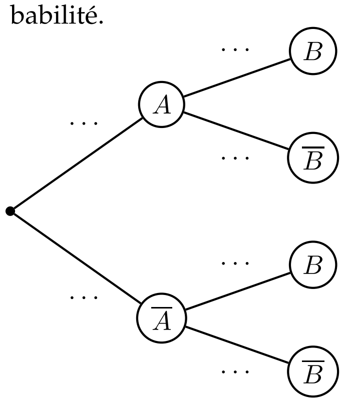
$$B = B \cap \Omega = B \cap (A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n) = (B \cap A_1) \cup (B \cap A_2) \cup \cdots \cup (B \cap A_n)$$

Cette union étant disjointe, on a donc

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(B \cap A_1) + \mathbb{P}(B \cap A_2) + \cdots + \mathbb{P}(B \cap A_n)$$

VIII.2 Arbre pondéré

En terminale l'utilisation de ces formules est souvent facilitée par un ou plusieurs arbres pondérés :
Toutes les propriétés énoncés précédemment peuvent être énoncées ainsi lorsque l'on utilise un arbre de probabilité.



Principes

- La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même noeud vaut 1.
- La probabilité d'une issue représenté par un chemin est égale au produit des probabilités inscrites sur les branches de ce chemin.
- La probabilité d'un évènement B est la somme des probabilités des issues associées aux chemins qui conduisent à la réalisation de B.

IX Indépendance

IX.1 définition

La notion d'indépendance (*à ne pas confondre avec l'incompatibilité*) de deux évènements est sans doute la plus délicate à comprendre aussi je vais essayer (*pour une fois*) d'être assez **clair** .....

A ce stade, on connait la proportion de gens qui pensent que Giorgio est un dieu, dans la population totale........ Mais est-elle la même ($cette\ proportion$) parmis les hommes et les femmes ?

✂ ....

Donc le fait d'être un $homme$ ou une $femme$ a une influence sur la proportion de ceux qui pensent qu'il en est un, ainsi les évènements D et H sont **dépendants** .

Il y aurait eu **indépendance** entre le sexe et le fait de penser que le Grand Giorgio est un dieu , si la proportion de ceux qui le pensent avait été la même parmis les $femmes$, parmis les $hommes$......., et dans la population totale

ce qui nous donnerai en outre $\mathbb{P}_H(D) = \mathbb{P}_F(D) = \mathbb{P}(D)$............il en découle

une définition plus *Mathémaco-probabiliste* de l'indépendance

indépendance

Les événements A et B sont dits **indépendants** si $\mathbb{P}(A \cap B) = \mathbb{P}(A) \times \mathbb{P}(B)$

Il vient donc naturellement la caractérisation mathématique de deux évènements indépendants :

une autre formulation

Soient A et B deux événements tels que $\mathbb{P}(B) \neq 0$. Les événements A et B sont indépendants si et seulement si

$$\mathbb{P}_B(A) = \mathbb{P}(A) \quad \text{ou} \quad \mathbb{P}_A(B) = \mathbb{P}(B)$$

IX.2 remarques

- Veillez à ne pas confondre événements *indépendants* et événements *incompatibles*. Montrez d'ailleurs que deux événements incompatibles de probabilité non nulle ne sont jamais indépendants.
- La seule idée à retenir est que , si A et B sont indépendants, **avoir observé la réalisation de A ne modifie pas la probabilité d'une éventuelle réalisation de B**.
- Ainsi, en supposant que la Française des Jeux n'utilise pas de boules truquées, on peut considérer que deux tirages successifs du loto sont indépendants.

Propriété

Si deux événements A et B sont indépendants, alors :

1. les événements $\overline{A}$ et B sont indépendants
2. les événements A et $\overline{B}$ sont indépendants
3. les événements $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont indépendants

X exemples

X.1 exemple 1

1. Dans une classe, les garçons représentent le quart de l'effectif. Une fille sur trois a eu son permis du premier coup, alors que seulement un garçon sur dix l'a eu du premier coup. On interroge un élève (garçon ou fille) au hasard. La probabilité qu'il ait eu son permis du premier coup est égale à :

   a. 0,043 b. 0,275 c. 0,217 d. 0,033

2. Dans la classe de la question 2, on interroge un élève au hasard parmi ceux ayant eu leur permis du premier coup. La probabilité que cet élève soit un garçon est égale à :

   a. 0,100 b. 0,091 c. 0,111 d. 0,25

X.2 exemple 2

Un lecteur d'une bibliothèque est passionné de romans policiers et de biographies. Cette bibliothèque lui propose 150 romans policiers et 50 biographies.
40 % des écrivains de romans policiers sont français et 70 % des écrivains de biographies sont français.
Le lecteur choisit un livre au hasard parmi les 200 ouvrages.

1. Le lecteur ayant choisi un roman policier, la probabilité que l'auteur soit français est :

   a. $0,3$ **b.** $0,8$ **c.** $0,4$

2. La probabilité que Ie lecteur choisisse un roman policier français est

   a. $1,15$ **b.** $0,4$ **c.** $0,3$

3. La probabilité que le lecteur choisisse un livre d'un écrivain français est :

   a. $0,9$ **b.** $0,7$ **c.** $0,475$

4. La probabilité que le lecteur ait choisi un roman policier sachant que l'écrivain est français est :

   a. $\dfrac{4}{150}$ **b.** $\dfrac{12}{19}$ **c.** $0,3$

5. Le lecteur est venu 20 fois à la bibliothèque ; la probabilité qu'il ait choisi au moins un roman policier est :

   a. $1-(0,25)^{20}$ **b.** $20\times 0,75$ **c.** $0,75\times(0,25)^{20}$

   dans cette question, le tirage est assimilé à un tirage avec remise, ce qui assure l'indépendance des 20 choix

Troisième partie
Variables aléatoires discrètes (Rappels)

XI Rappels de première

XI.1 Variable aléatoire

variable aléatoire

*Lorsqu'à chaque évènement élémentaire ω d'un univers Ω on associe un nombre réel, on dit que l'on définit une **variable aléatoire** réelle notée en général X. Ainsi X est une application de Ω dans $\mathbb{R}$.*

XI.2 Loi de probabilité associé à une variable àléatoire

Loi de probabilité

Soit P une probabilité sur un univers Ω.
Soit X une variable aléatoire tel que $X(\Omega) = \{x_1, x_2, .., x_n\}$, qui désigne l'ensemble des valeurs prises par X, soit fini.
*Lorsque qu'à chaque valeur x_i prise par X on lui associe la probabilité $p_i = P(X = x_i)$, on dit que l'on définit la **loi de probabilité** P de la variable aléatoire X.*

XI.3 Espérance,variance,écart-type

Soit X dont la loi est donnée par le tableau :

valeurs prises par X :x_i	x_1	x_2	......	x_n	total
$p_i = P(X = x_i)$	p_1	p_2	......	p_n	1

.

✥ **L'espérance mathématique de** X est le réel défini par $\boxed{E(X) = \sum_{i=1}^{i=n} x_i p_i}$ où $p_i = P(X = x_i)$.

✥ **La variance de** X est le réel défini par : $\boxed{V(X) = E(X^2) - (E(X))^2 = \sum_{i=1}^{i=n} (x_i - E(X))^2 p_i}$

ou encore $\boxed{V(X) = \sum_{i=1}^{i=n} x_i^2 p_i - (E(X))^2}$.

✥ **L'écart type de** X est le réel défini par $\boxed{\sigma(X) = \sqrt{V(X)}}$

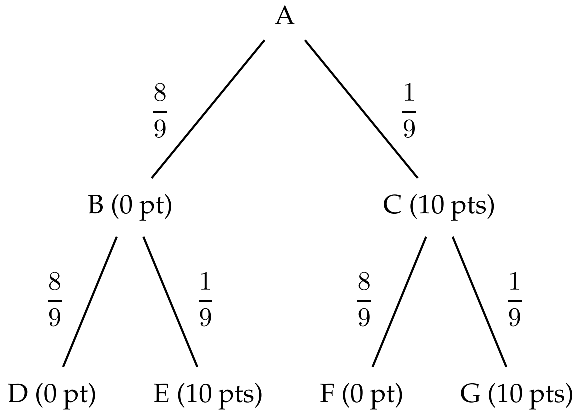
REMARQUES :

- ✥ l'espèrance mathématique désigne , dans le cas d'un jeu , une espérance de gain moyen , en outre si $E(X) = 0$ on dit que le jeu est **équitable**, si $E(X) > 0$ on dit que le jeu est **avantageux** et si $E(X) < 0$ le jeu est dit **désavantageux** pour le joueur.
- ✥ la variance est une quantité positive ou nulle , donc si après calculs vous trouvez $V(X) < 0$ il y a une grosse bourde quelque part......

XII en situation

XII.0.1 exercice 1

Un joueur lance une bille qui part de A puis emprunte obligatoirement une des branches indiquées sur l'arbre ci-dessous pour arriver à l'un des points D, E, F et G.



On a marqué sur chaque branche de l'arbre la probabilité pour que la bille l'emprunte après être passé par un nœud.

Les nombres entre parenthèses indiquent les points gagnés par le joueur lors du passage de la bille. On note X la variable aléatoire qui correspond au nombre total de points gagnés à l'issue d'une partie c'est-à-dire une fois la bille arrivée en D, E, F ou G.

1. Dans cette question, les résultats sont attendus sous forme fractionnaire.
   (a) Déterminer la loi de probabilité de X.
   (b) Calculer l'espérance de X.
   (c) Calculer la probabilité que la bille ait suivi la branche AC sachant que le joueur a obtenu exactement 10 points.
2. Le joueur effectue 8 parties et on suppose que ces huit parties sont indépendantes. On considère qu'une partie est gagnée si le joueur obtient 20 points à cette partie.
   (a) Calculer la probabilité qu'il gagne au plus 1 partie. On donnera le résultat arrondi au millième
   (b) Calculer la probabilité qu'il gagne au moins une partie. On donnera le résultat arrondi au millième.

XII.0.2 exercice 2

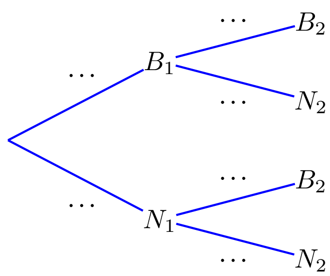
On dispose de deux urnes U_1 et U_2 contenant des boules indiscernables au toucher.

U_1 contient k boules blanches (k entier naturel supérieur ou égal à 1) et 3 boules noires.
U_2 contient 2 boules blanches et une boule noire.

On tire une boule au hasard dans U_1 et on la place dans U_2. On tire ensuite, au hasard, une boule dans U_2. L'ensemble de ces opérations constitue une épreuve.

On note B_1 (respectivement N_1) l'évènement « on a tiré une boule blanche (resp. noire) dans l'urne U_1 ».
On note B_2 (respectivement N_2) l'évènement « on a tiré une boule blanche (resp. noire) dans l'urne U_2 ».

1. (a) Recopier et compléter par les probabilités manquantes l'arbre ci-dessous :



Montrer que la probabilité de l'évènement B_2 est égale à $\dfrac{3k+6}{4k+12}$.

Dans la suite on considère que $k = 12$.
Les questions 2 et 3 sont indépendantes l'une de l'autre et peuvent être traitées dans n'importe quel ordre.

2. Un joueur mise 8 euros et effectue une épreuve.
Si, à la fin de l'épreuve, le joueur tire une boule blanche de la deuxième urne, le joueur reçoit 12 euros. Sinon, il ne reçoit rien et perd sa mise. Soit X la variable aléatoire égale au gain du joueur, c'est-à-dire la différence entre la somme reçue et la mise.
   (a) Montrer que les valeurs possibles de X sont 4 et -8.
   (b) Déterminer la loi de probabilité de la variable X.
   (c) Calculer l'espérance mathématique de X.
   (d) Le jeu est-il favorable au joueur ?
3. Un joueur participe n fois de suite à ce jeu.
Au début de chaque épreuve, l'urne U_1 contient 12 boules blanches et 3 noires, et l'urne U_2 contient 2 boules blanches et 1 noire.
Ainsi, les épreuves successives sont indépendantes.
Déterminer le plus petit entier n pour que la probabilité de réaliser au moins une fois l'évènement B_2 soit supérieure ou égale à $0,99$.

XIII La loi binomiale

XIII.1 Définition

définition

Considérons une expérience aléatoire ne comportant que deux issues possibles, l'une appelé "succès" et l'autre "échec".
On répète cette expérience aléatoire n fois de suite de façon indépendante.
On associe à cette expérience la variable aléatoire X qui donne le nombre total de succès.
La loi de probabilité de X est appelée loi binomiale de paramètre n et p.
On la note $\mathcal{B}(n;p)$.

XIII.2 Propriétés

Propriété

Soit une variable aléatoire X suivant une loi binomiale $\mathcal{B}(n;p)$, alors pour tout entier k compris entre o et n, la probabilité que X soit égale à k avec $0 \leq k \leq n$ est : $P(X=k) = \dbinom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$.
De plus : $E(X) = np$, $V(X) = np(1-p)$
On rappelle que $\dbinom{n}{k} = \dfrac{n!}{k!(n-k)!}$ et compte sur le schéma de Bernoulli(arbre), le nombre de chemins contenant k succès

XIII.3 Exercices

XIII.3.1 exercice 1

Un QCM est composé de 10 questions indépendantes.
Pour chaque question, quatre réponses sont proposées et une seule est juste.

Un candidat répond au hasard à chacune des questions. On note X la variable aléatoire qui compte le nombre de réponses justes.

1. Montrer que X suit une loi binomiale dont vous déterminerez les paramètres.
2. Calculez $p(X = 6)$ et $p(X = 8)$.
3. Calculez l'espérance de X.

XIII.3.2 exercice 2

Le principe du *loto sportif* est le suivant :
il y a 13 lignes dans la grille , chacune des lignes est du type $\boxed{1}\boxed{N}\boxed{2}$, il faut cocher dans chacune des lignes *(jeu simple.....)* une et une seule case.On estime par ailleurs que chacune des cases d'une même ligne à la même probabilité d'être cochée...et que la répétition est faite de façon indépendante...on désigne par X la variable aléatoire donnant le nombre de bons résultats

1. quelle est la loi de X , vous préciserez les paramètres
2. quelle est la probabilité pour un joueur d'avoir :
   (a) aucun bon résultat,un seul bon résultat,au moins un bon résultat
   (b) 7 bons résultats , 11 bons résultats , 13 bons résultats
3. quel est,en moyenne, le nombre de bons résultats qu'un joueur peut espérer avoir sur une grille ? conclusion