Pour les TS2 version boulets

Giorgio Chuck VISCA

7 février 2016

PRIMITIVES

Table des matières

Première partie
Le cours

I Définition et propriétés

- Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

  On note F une fonction définie sur $\mathbb{R}$ vérifiant la **propriété différentielle** suivante : $F'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$. *On ne connait pas* ***explicitement*** *F, mais on peut tracer sa courbe à l'aide de la méthode d'euler par exemple.*
  Cette fonction est donc telle que $F'(x) = f(x)$: On dit alors que F est une **primitive de f** sur $\mathbb{R}$.

- Un autre exemple : on pose $F(x) = x^3 + x + 1$ et $G(x) = x^3 + x + 15428963$.
  On pose par ailleurs $f(x) = 3x^2 + 1$. Vous constatez aisément que $\forall x \in \mathbb{R},\ \ F'(x) = G'(x) = f(x)$.
  F et G sont alors **des primitives** de f sur $\mathbb{R}$.

I.1 définition

Définition

soit f une fonction définie sur un **intervalle D_f**.
On appelle **PRIMITIVE** de la fonction f ,une fonction F définie sur D_f ,
et qui a pour dérivée la fonction f....., ainsi $\forall x \in\ D_f, F'(x) = f(x)$.

Sur l'exemple précédent, F est alors une primitive de f,......oui mais G aussi en est une !
Ainsi, une fonction admet non pas une primitive, mais des primitives, en effet :

Lien entre les primitives

si F et G sont des primitives d'une même fonction f sur D_f,alors :
$\forall x \in\ D_f, F(x) = G(x) + k, k \in \mathbb{R}$, *(ainsi les primitives d'une même fonction sont toutes égales, mais à une constante additive près ...)*

PREUVE :

✂ ....

ainsi si F est ***une*** *primitive de f,* ***toutes*** *les primitives de f,*
sont les fonctions $x \to\ F(x) + k$,mais il en est une et une seule dont la courbe passe par un point donné...

I.2 primitive passant par un point donné

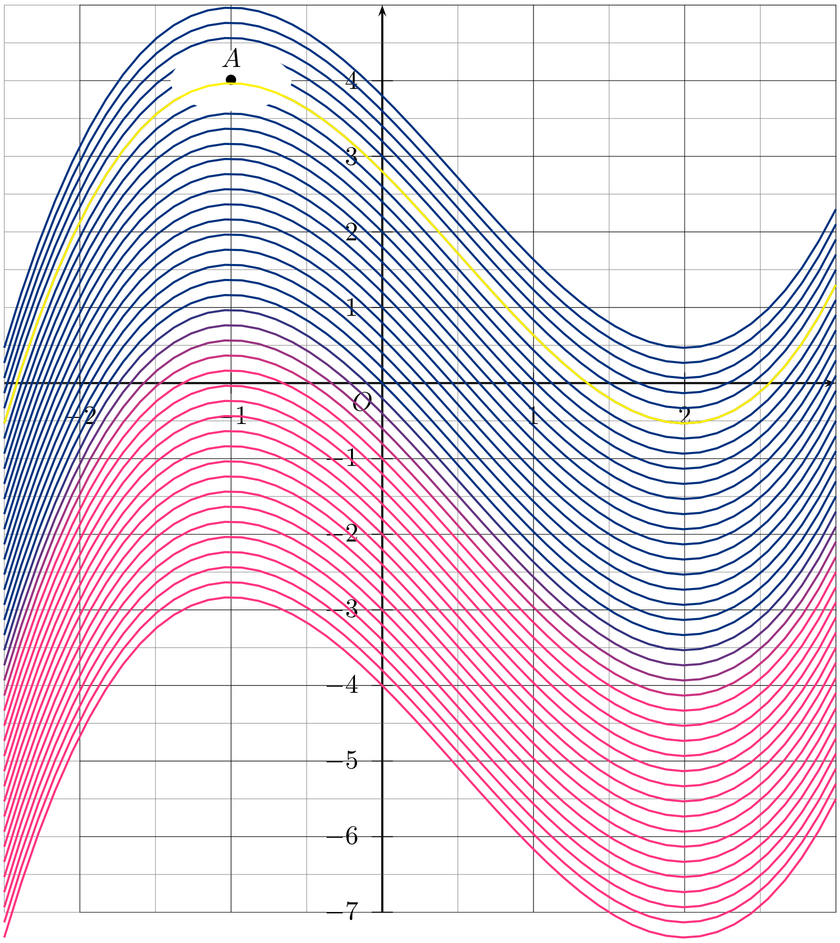
Unicité de la primitive

Il existe une *unique* primitive F de f vérifiant $F(x_0) = y_0$, i.e telle que C_F passe par le point de coordonnées (x_0, y_0), où x_0 et y_0 sont deux réels donnés,avec $x_0 \in\ D_f$.

I.3 illustration graphique

La figure ci-dessous représente les primitives de la fonction $f(x) = x^2 - x - 2$, c'est à dire les fonctions F définies par : $F(x) = \dfrac{1}{3}x^3 - \dfrac{1}{2}x^2 - 2x + k$.

On constate graphiquement qu'il n'y en a qu'une qui passe par le point $A(-1,4)$ par exemple.
D'où **l'unicité de la primitive passant par un point donné.**



I.4 condition d'existence des primitives d'une fonction donnée

On peut s'interroger sur la ou les condition(s) d'existence d'une primitive sur un intervalle I :
nous donnons ici une condition suffisante d'existence,qui est la suivante :

Condition d'existence

Toute fonction continue sur un intervalle I,admet une primitive sur I.
Pour justifier l'existence d'une primitive à une fonction f,il suffira donc de justifier la continuité de f.

Les règles de calculs données dans le **II** qui va suivre, sont obtenues grâce aux formules de dérivations qu'il faut tout simplement adapter et "*lire à l'envers*" ,en effet :

- on a $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = -\dfrac{u'}{u^2}$ donc ....est une primitive de.....................
- on a $(\sqrt{u})' = \dfrac{u'}{2\sqrt{u}}$ donc ....est une primitive de ....

de la même façon , on en déduit les formules de calculs des primitives suivantes :

II Méthodes de calculs

II.1 primitives des fonctions usuelles

Tableau des primitives des fonctions usuelles

la fonction f	**a pour primitives**	**les fonctions** F
$f(x) = a$	sur $\mathbb{R}$	$F(x) = ax + k$
$f(x) = x$	sur $\mathbb{R}$	$F(x) = \frac{x^2}{2} + k$
$f(x) = \frac{1}{x^2}$	sur $]-\infty, 0[$ ou sur $]0, +\infty[$	$F(x) = -\frac{1}{x} + k$
$f(x) = x^n, n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	sur $\mathbb{R}$ ou sur $\mathbb{R}_+^*$ ou sur $\mathbb{R}_-^*$	$F(x) = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + k$
$f(x) = \frac{1}{x}$	sur $]0, +\infty[$	$F(x) = \ln x + k$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$	sur $]0, +\infty[$	$F(x) = 2\sqrt{x} + k$
$f(x) = e^x$	sur $\mathbb{R}$	$F(x) = e^x + k$
$f(x) = sin(x)$	sur $\mathbb{R}$	$F(x) = -cos(x) + k$
$f(x) = cos(x)$	sur $\mathbb{R}$	$F(x) = sin(x) + k$
$f(x) = 1 + tan^2(x) = \frac{1}{cos^2(x)}$	sur$\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$	$F(x) = tan(x) + k$

II.2 règles de calculs

les règles de calculs de primitives sont données par les formules suivantes :

fonctions f	primitives F
$f = \frac{u'}{u^2}$	$F = -\frac{1}{u} + k$
$f = u'u$	$F = \frac{1}{2}u^2 + k$
$f = u'u^n, n \in \mathbb{Z} \setminus \{-1\}$	$F = \frac{1}{n+1}u^{n+1} + k$
$f(x) = \sin(ax+b)$ avec $a \neq 0$	$F(x) = -\frac{1}{a}\cos(ax+b)$
$f(x) = \cos(ax+b)$ avec $a \neq 0$	$F(x) = \frac{1}{a}\sin(ax+b)$
$f = \frac{u'}{\sqrt{u}}$	$F = 2\sqrt{u} + k$
$f = u'e^u$	$F = e^u + k$
$f(x) = e^{ax+b}$	$F(x) = \frac{1}{a}e^{ax+b} + k$
$f = \frac{u'}{u}$	$F = \ln\|u\| + k$

Deuxième partie
Les exos

exercice 1

Déterminer les réels a, b, c tels que la fonction F définie sur $\mathbb{R}$ par : $F(x) = (ax^2 + bx + c)e^{2x}$ soit une primitive de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (xe^x)^2$.

exercice 2

Calculer une primitive des fonctions suivantes sur I :

1. $f(x) = (2x+1)^3$ sur $I = \mathbb{R}$.
2. $g(x) = \frac{1}{(3x+1)^3} - \frac{3}{(3-4x)^4}$ sur $I =]\frac{3}{4}; +\infty[$.
3. $i(x) = \frac{3x^3}{\sqrt{2x^4+5}}$ sur $I = \mathbb{R}$.
4. $j(x) = \frac{1}{\sqrt{x}(4+3\sqrt{x})^2}$ sur $I = \mathbb{R}_+^*$.
5. $k(x) = \tan x + \tan^3 x$ sur $I =]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[$
6. $f(x) = \frac{3}{2x+1}$ sur $]-0.5; +\infty[$
7. $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ sur $\mathbb{R}$
8. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$ sur $\mathbb{R}_+^*$
9. $f(x) = \frac{1}{x \ln x}$ sur $]1; +\infty[$

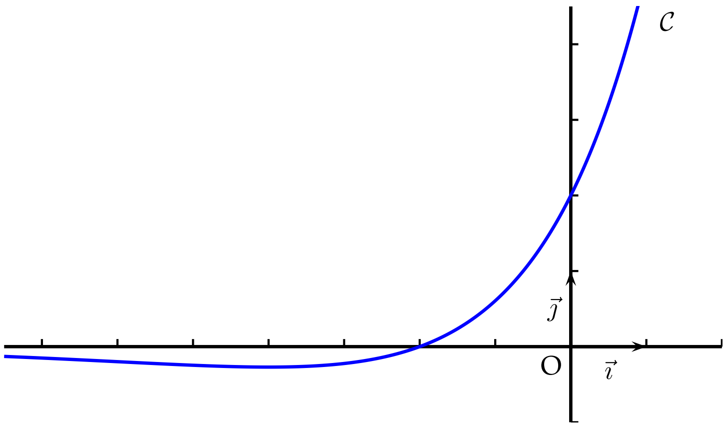
10. $f(x) = 3e^{-3x+1}$ sur $\mathbb{R}$
11. $f(x) = \dfrac{e^{1/x}}{x^2}$ sur $]0;+\infty[$
12. $f(x) = \dfrac{e^{-x}}{1+3e^{-x}}$

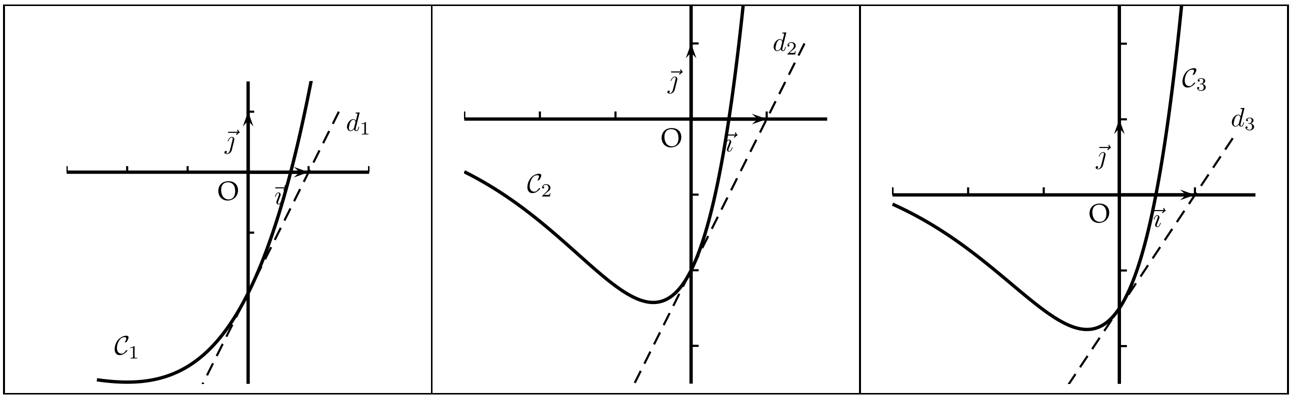
exercice 3

Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$. On note $\mathcal{C}$ sa courbe représentative dans le plan muni d'un repère $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

Partie A

Sur les graphiques ci-dessous, on a représenté la courbe $\mathcal{C}$ et trois autres courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ avec la tangente en leur point d'abscisse 0.





1. Donner par lecture graphique, le signe de $f(x)$ selon les valeurs de x.
2. On désigne par F une primitive de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   (a) à l'aide de la courbe $\mathcal{C}$, déterminer $F'(0)$ et $F'(-2)$.
   (b) L'une des courbes $\mathcal{C}_1$, $\mathcal{C}_2$, $\mathcal{C}_3$ est la courbe représentative de la fonction F.
   Déterminer laquelle en justifiant l'élimination des deux autres.