Cours de terminale S

Giorgio Chuck VISCA

13 mars 2016

Lois continues

Table des matières

Première partie
Lois continues : cours

I Du discret au continu : Exemples de lois continues

I.1 Densité de probabilité

Définition d'une densité
Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$.
On appelle ***densité de probabilité sur*** I*, toute fonction* f $\boxed{\text{continue, positive, et telle que } \int_I f(t)dt = 1}$.

EXEMPLES :
✦ Démontrer que la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{1}{3}$ est une densité de probabilité sur $[1, 4]$
✦ Démontrer que la fonction g définie par $g(x) = \dfrac{1}{x+1}$ est une densité de probabilité sur $[0, \mathrm{e} - 1]$.
✂ ....

I.2 loi de probabilité d'une variable aléatoire

ACHTUNG : Dans tout ce qui suit X désigne une variable aléatoire à valeurs dans un **intervalle..**

Calcul pratique et loi de probabilité
On note I un intervalle de $\mathbb{R}$ et f une densité de probabilité sur I.

Définition 1 : L'application P qui à tout intervalle $[a, b]$ de I associe le réel $\boxed{P([a,b]) = \int_a^b f(t)dt}$ est appelée **Loi de probabilité sur** I.

Définition 2 : On dit qu'une variable aléatoire X à valeurs dans I suit une loi de probabilité P si pour tout intervalle $[a, b]$ de I on a : $\boxed{P(a \leqslant X \leqslant b) = P([a,b]) = \int_a^b f(t)dt.}$

Définition 3 : L'espérance mathématique (la moyenne en fait) d'une variable aléatoire X dont la densité est la fonction f sur l'intervalle I est donné par : $\boxed{E(X) = \int_I xf(x)\mathrm{d}x}$.

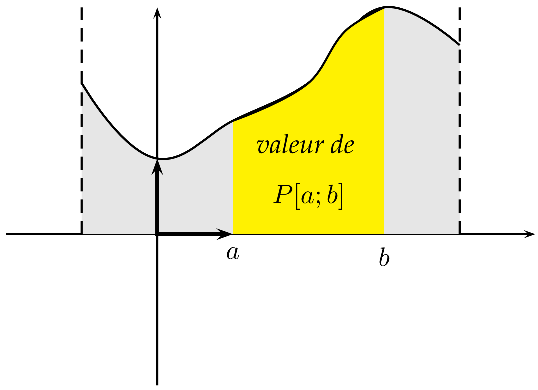
PROPRIÉTÉS :

- ✦ $P(\{a\}) = P(X = a) = 0$, ceci a pour conséquence qu'une loi **continue** ne **'charge'** pas les points , c'est à dire que $P([a, b]) = P([a, b[) = P(]a, b]) = P(]a, b[)$.
- ✦ $P(\overline{[a, b]}) = 1 - P([a, b])$

Fondamental
Si X est une variable aléatoire continue de densité de probabilité f sur I, alors pour tous réels a et b de I tels que $a \leqslant b$, on a :

$$P(a \leqslant X \leqslant b) = P(X \leqslant b) - P(X \leqslant a)$$

- ✦ *Ci-contre est dessiné une courbe définissant une densité de probabilité ;*
- ✦ *La probabilité que la variable X étudiée soit dans l'intervalle $[a; b]$ est alors donnée par l'aire comprise entre les droites $x = a$, $x = b$ la courbe et l'axe des abscisses ;*
- ✦ *vous comprendrez aisément que l'aire ne change pas si l'on inclue on non les frontières .....*



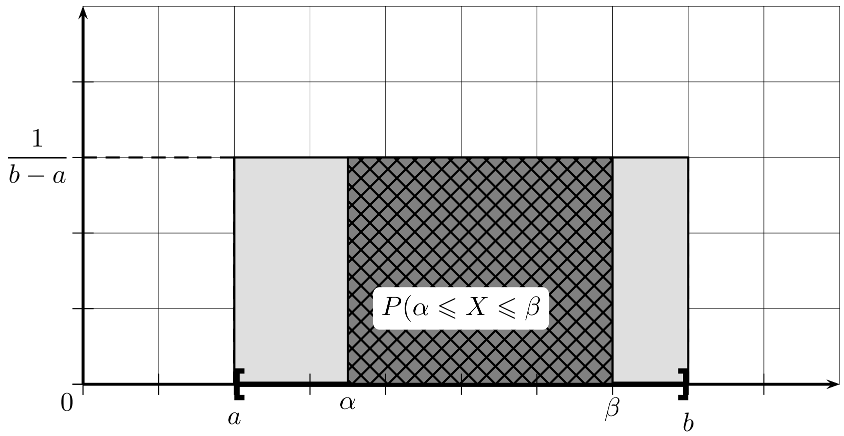
I.3 La loi uniforme

PROBLÈME : Soit f une fonction constante sur $[a, b]$.
Déterminer la valeur de cette constante pour que f soit une densité de probabilité .
✂ ....

Loi uniforme
Si la densité f est constante sur $[a, b]$ et égale à $\dfrac{1}{b-a}$, on dit que P est la **loi uniforme.**
La loi uniforme modélise le choix d'un nombre quelconque de $[a, b]$.
En outre , si la variable aléatoire X suit une loi uniforme sur $[a, b]$ on a note $X \rightsquigarrow \mathcal{U}[a, b]$:

$$\boxed{P(\alpha \leqslant X \leqslant \beta) = P([\alpha,\beta]) = \int_\alpha^\beta \frac{1}{b-a}dx = \frac{\beta-\alpha}{b-a}.}$$

Par ailleurs l'espérance mathématique de X est ici donnée par $E(X) = \displaystyle\int_a^b xf(x)\mathrm{d}x = \frac{a+b}{2}$



EXEMPLES :

1. On choisit au hasard un nombre dans l'intervalle $[0, 7]$;le choix est modélisé par une loi uniforme.
   (a) Calculer la probabilité que ce nombre soit dans $[2, 5]$.
   (b) Calculer la probabilité que ce nombre soit dans $[4, 6]$.
   (c) Calculer $P_{[2,5]}([4, 6])$.
   (d) Donner $E(X)$
2. on choisit un nombre au hasard de $[0, 1]$.
   Calculer la probabilité que le premier chiffre après la virgule soit impair , sachant que ce nombre est strictement supérieur à 0.7.
3. Giorgio attend devant la porte du bahut. Il voit passer souvent un élève qui sort de chez la proviseure. On estime que le temps d'attente, en minutes, de l'arrivée du prochain élève chez la proviseure suit la loi $\mathcal{U}[0, 5]$.
   (a) Quelle le temps d'attente moyen de Giorgio entre deux élèves qui vont chez le directeur ?
   (b) Quelle est la probabilité qu'il attende entre 1 et 3 minutes ?

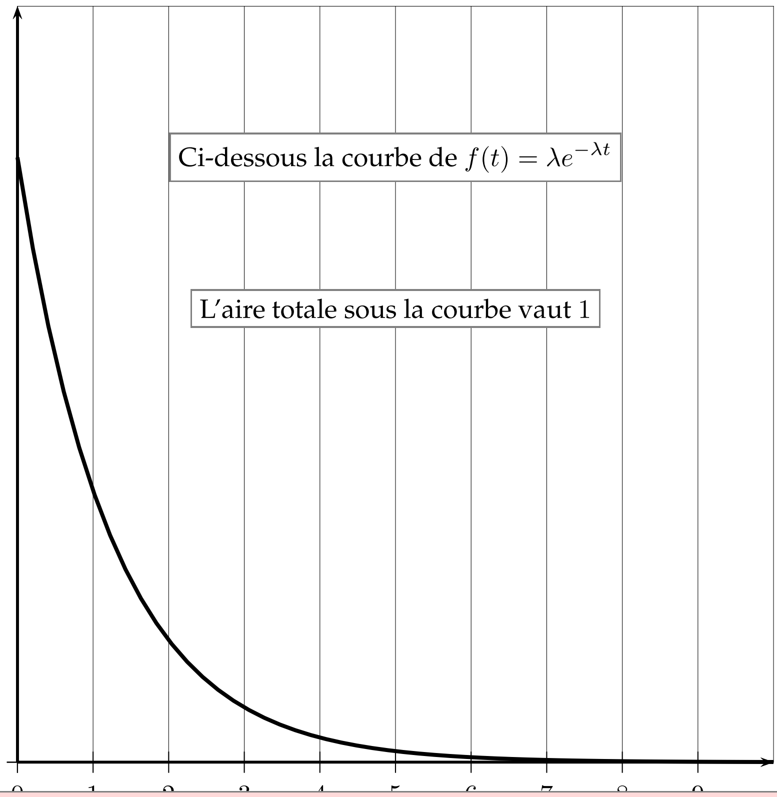
✂ ....

I.4 la loi exponentielle

REMARQUE : Dans tout ce qui suit il faudra donner un sens à $\int_0^{+\infty} f(t)dt$, donc à un intégrale avec une borne infinie , nous définissons cette intégrale de la manière suivante :
$\int_0^{+\infty} f(t)dt = \lim_{X\to+\infty} \int_0^{X} f(t)dt.$
En conséquence , faites tous vos calculs sur $[0, X]$ puis ensuite passer à la limite en $+\infty$.
EXERCICE : Soit λ un réel strictement positif.
Démontrer que la fonction f_λ définie par $f_\lambda(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ est une densité de probabilité sur $[0, +\infty[$.

✂ ....

Loi exponentielle
Soit λ un réel strictement positif.On dit que P suit **la loi exponentielle de paramètre** λ sur $[0, +\infty[$ lorsque sa densité de probabilité est la fonction f_λ définie par : $f_\lambda(t) = \lambda e^{-\lambda t}$.
Si la variable aléatoire X suit la loi exponentielle de paramètre λ on note $X \rightsquigarrow \mathcal{E}(\lambda)$.
On a donc pour $0 \leqslant a \leqslant b$: $\boxed{P([a, b]) = \int_a^b \lambda e^{-\lambda t}dt = e^{-\lambda a} - e^{-\lambda b}}$.
Cette probabilité est celle qui donne la probabilité pour que la durée de vie d'une substance ou un appareil soit comprise entre a et b.
la loi exponentielle modélise en outre la loi de durée de vie d'une substance radioactive



Propriétés fondamentales

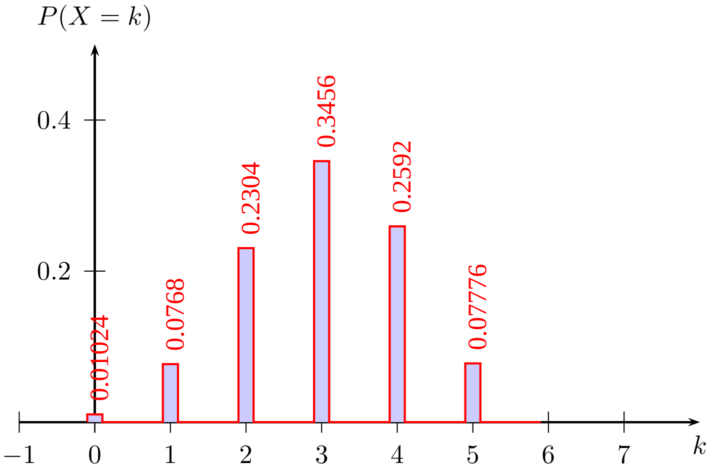
1. Si la variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{E}(\lambda)$, son espérance mathématique est alors le réel $E(X)$ défini par $E(X) = \lim\limits_{x \to +\infty} \displaystyle\int_0^x tf(t)\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \lambda t e^{-\lambda t}\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}$
2. Si la variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{E}(\lambda)$, on a alors pour tout réel t positif ou nul, $P(X \geqslant t) = e^{-\lambda t}$ et $P(0 \leqslant X \leqslant t) = 1 - e^{-\lambda t}$
3. Si la variable aléatoire X suit la loi $\mathcal{E}(\lambda)$, on dit que X suit alors une loi sans mémoire, ou sans vieillissement, c'est à dire que pour tout t et s positifs, on a :

$$P_{X \geqslant t}(X \geqslant t + s) = P(X \geqslant s)$$

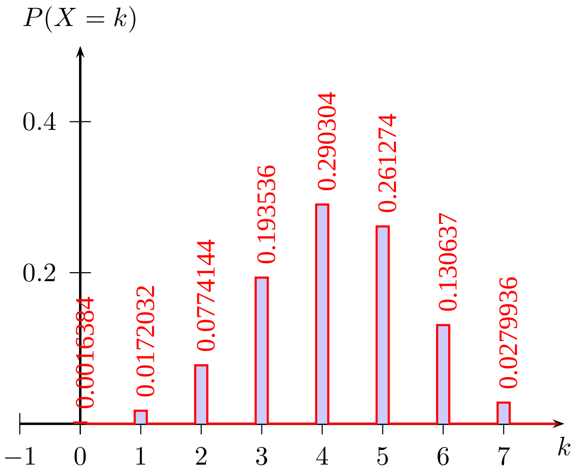
✂ ....

I.5 Les lois normales

I.5.1 Approximation d'une loi binomiale "centrée et réduite"

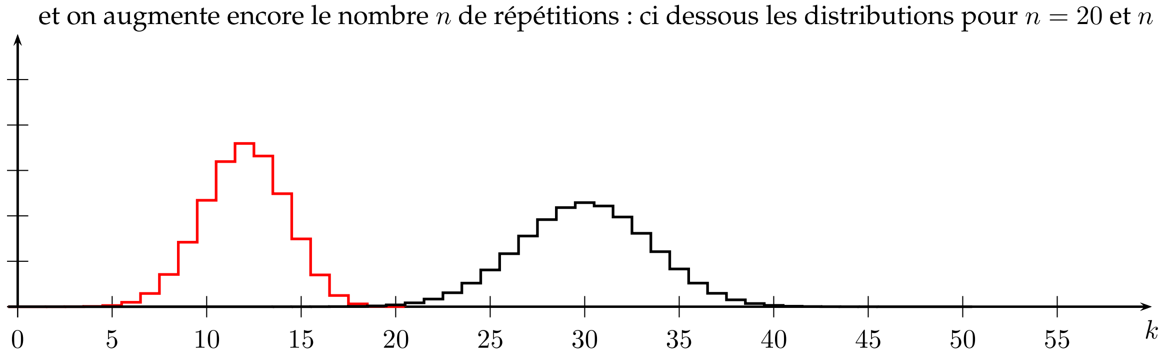


Sur la figure ci-contre, j'ai tabulé la loi binomiale $B(5, 0.6)$, Par exemple qui donn ela proba de succès quand marguerite lance une fléchette 5 fois de suite, avec une probabilité d'atteindre le centre qui vaut 0.6. C'est à dire que $n = 5$ et $p = 0.6$. Par exemple la probabilité $P(X = 2) = \binom{5}{2}(0.6)^2(0.4)^3 \simeq 0.0512$, ou encore $P(X = 0) = (0.2)^5 \simeq 0.00032$. Bref vous avez pigé quoi =)

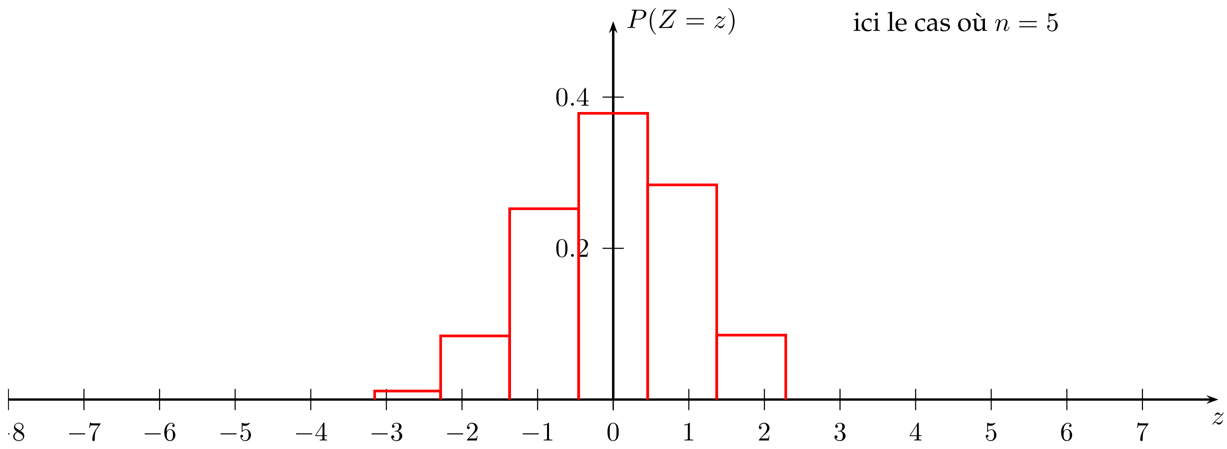


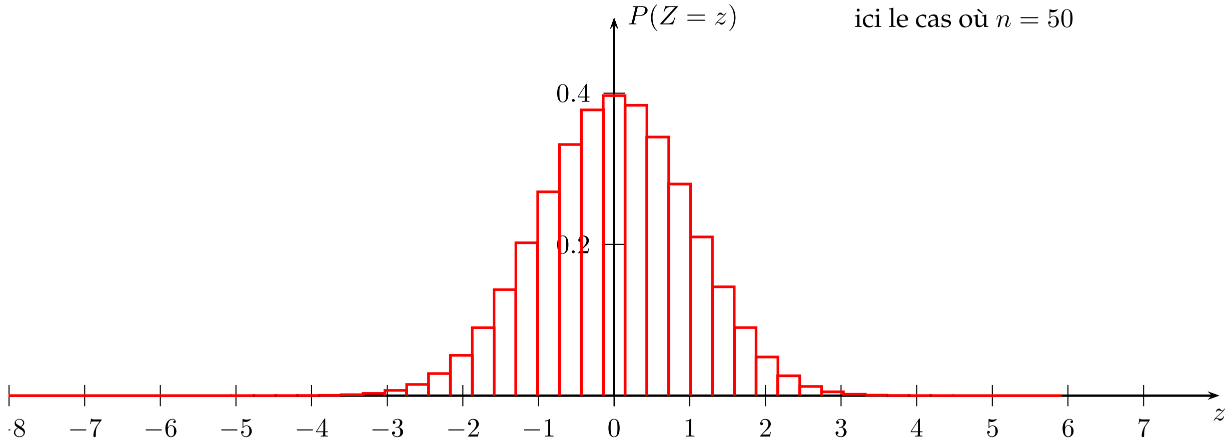
Ici j'ai augmenté le nombre de répétition à 7, c'est à dire que Marguerite lance 7 fois la fléchette sur la cible avec une proba de succès de 0.6. Donc $P(X = 2) = \binom{7}{2}(0.6)^2(0.4)^5$

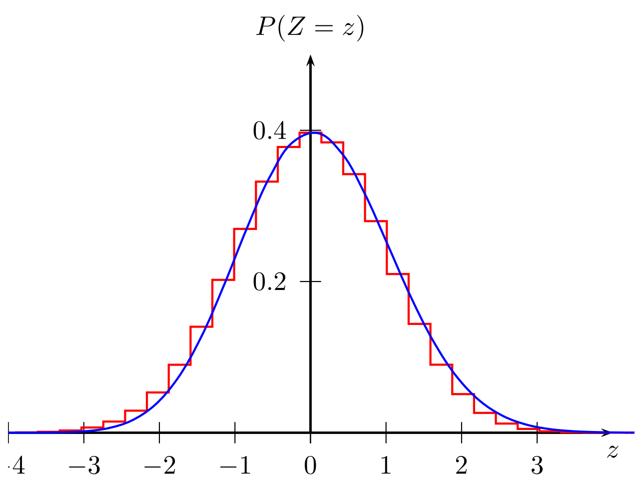
et on augmente encore le nombre n de répétitions : ci dessous les distributions pour $n = 20$ et $n = 50$



Dans notre exemple, pour $n = 50$, et $p = 0.6$, la moyenne du nombre de succès est $m = E(X) = np = 50 \times 0.6 = 30$, qui est le sommet de l'histogramme. Son écart type est donné par $\sigma = \sqrt{np(1-p)} = \sqrt{50 \times 0.6 \times 0.4}$ pour la loi binomiale. Nous allons **réduire et centrer** cette loi, en posant $Z = \dfrac{X - m}{\sigma}$, cela donne la distribution de Z d'espérance 0 et d'écart-type 1 suivante :







Bon à votre avis, qu'est-ce que j'ai voulu mettre en évidence sur le schéma ci-contre ? ? ? Mise à part ma faculté à taper des cours d'une clarté Giorgesque =). Hey bien, lorsque n tend vers $+\infty$, l'histogramme représentant la distribution binomiale, tend vers une courbe appelée **Courbe en cloche**, ou **courbe de Gauss**. Cette courbe représente la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

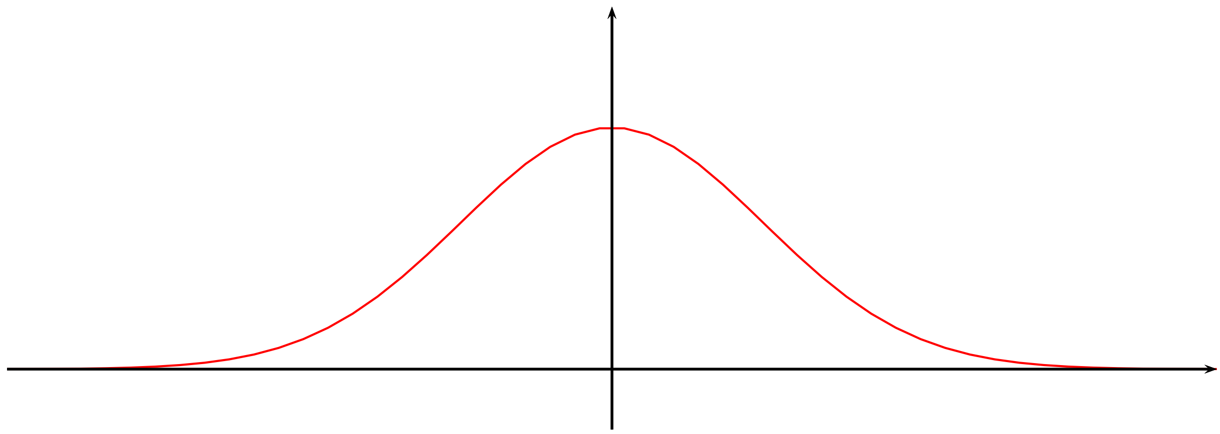
ça ne s'invente pas. Remarquez la beauté de ce résultat, en effet l'écart-type n'apparait pas dans la formule, ce qui signifie que tout phénomène courant tend finalement vers cette courbe, donc tout phénomène "normal" tend vers cette courbe. D'où le nom de Loi normale. Le théorème de Moivre Laplace que nous allons voir, stipule simplement qu'en faisant tendre n vers $+\infty$, où n est le nombre de répétition d'une épreuve à deux issues, avec une probabilité de succès p, en centrant cette distribution elle tendra vers la courbe de Gauss "centrée réduite" définie précédemment.

Théorème de Moivre Laplace
Si pour tout entier naturel n non nul, la variable aléatoire X_n suit la loi binomiale de paramètres n et p, on rappelle alors que $E(X_n) = np$ et que $\sigma(X_n) = \sqrt{np(1-p)}$.
La variable $Z_n = \dfrac{X_n - np}{\sqrt{np(1-p)}} = \dfrac{X_n - E(X_n)}{\sigma(X_n)}$ est appelée la variable centrée et réduite associée à X_n.
C'est à dire que son espérance est nulle et son écart type vaut 1, donc $E(Z_n) = 0$ et $\sigma(Z_n) = 1$.
Soient a et b deux réels tels que $a \leqslant b$. On a alors :

$$\lim_{n \to +\infty} P(a \leqslant Z_n \leqslant b) = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\dfrac{x^2}{2}} \, \mathrm{d}x$$

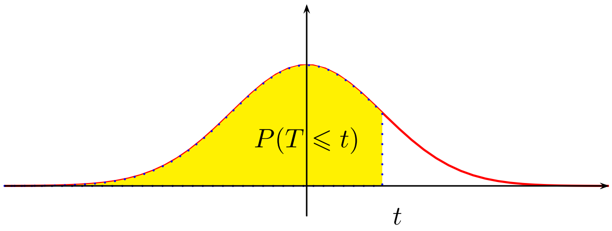
I.5.2 Loi Normale centrée réduite

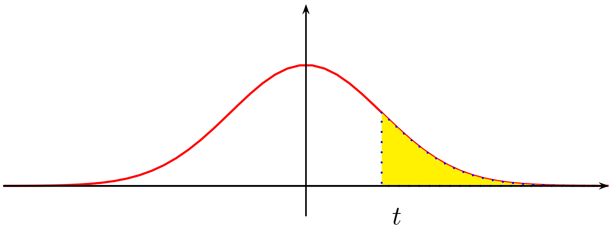
Loi $\mathcal{N}(0,1)$
Dire qu'une variable aléatoire T suit la loi normale centrée réduite notée $\mathcal{N}(0,1)$, signifie que sa densité de probabilité est la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$

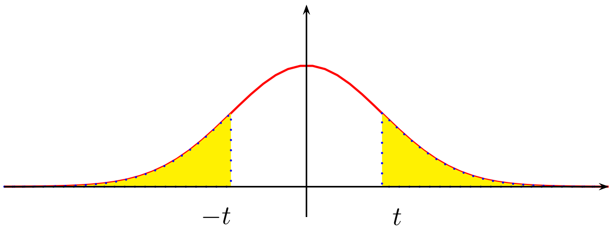


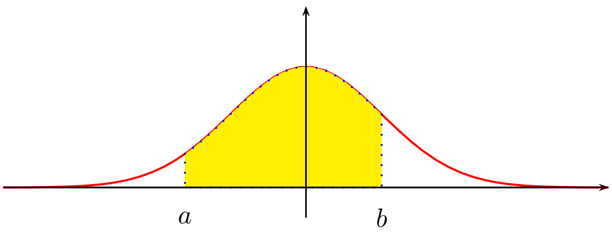
les première propriétés

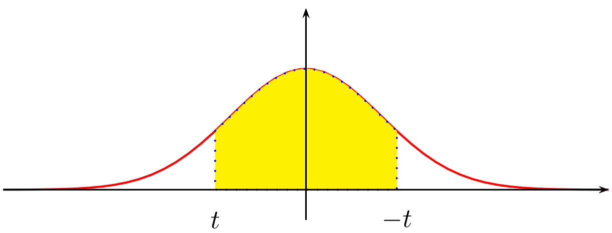
1. f est continue sur $\mathbb{R}$
2. Pour tous réels a et b tels que $a \leqslant b$, on a $\boxed{P(a \leqslant T \leqslant b) = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x}$
3. L'aire totale sous la courbe entre $-\infty$ et $+\infty$ est égale à 1 et elle représente $P(T \in \mathbb{R})$ c'est à dire l'évènement certain.
4. La fonction f est paire, c'est à dire symétrique par rapport à l'axe des ordonnées, il en découle donc que $\boxed{P(T \leqslant 0) = P(T \geqslant 0) = 0.5}$
5. Pour tout réel t, on a $\boxed{P(T \geqslant t) = 1 - P(T \leqslant t)}$
6. Pour tout réel t, on a $P(T \leqslant -t) = 1 - P(T \geqslant -t)$, or comme la courbe est symétrique par rapport à (Oy), on a $P(T \geqslant -t) = P(T \leqslant t)$, donc
$\boxed{P(T \leqslant -t) = 1 - P(T \leqslant t)}$
7. en outre $\boxed{P(-t \leqslant T \leqslant t) = 2P(T \leqslant t) - 1}$











Propriété
Si T est une variable aléatoire qui suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0,1)$, alors pour tout nombre réel $\alpha \in]0,1[$, il existe un unique nombre réel $u_\alpha > 0$ tel que $P(-u_\alpha \leqslant T \leqslant u_\alpha) = 1 - \alpha$

I.6 les lois normales quelconques

I.6.1 Définition

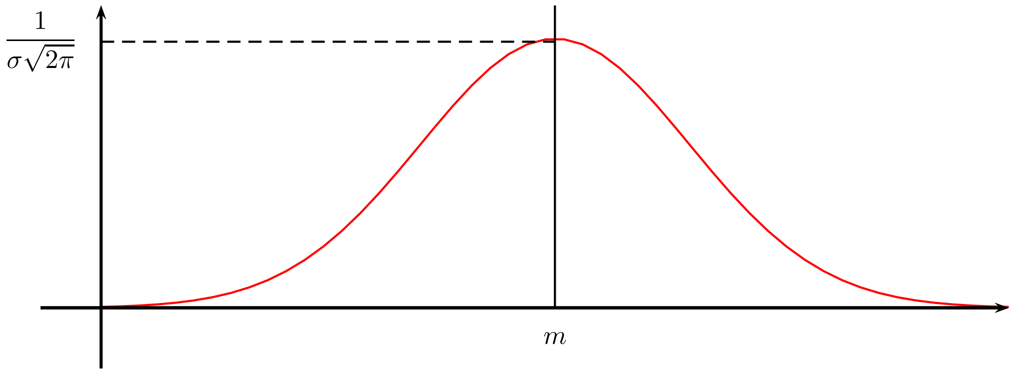
Définition
Soit m un nombre réel quelconque et $\sigma > 0$.
On dit qu'une variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(m;\sigma^2)$, lorsque la variable aléatoire $T = \dfrac{X-m}{\sigma}$ suit la loi normale centrée réduite $\mathcal{N}(0;1)$. En particulier, on a $E(T) = 0$ et $\sigma(T) = 1$.
On note $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(m;\sigma^2)$.

densité de $\mathcal{N}(m;\sigma^2)$
la densité de probabilité de $\mathcal{N}(m;\sigma^2)$ est la fonction définie pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m}{\sigma}\right)^2}$$

I.6.2 moyenne et écart-type

propriétés
Si $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(m;\sigma^2)$, on a alors $E(X) = m$ et $\sigma(X) = \sigma$, ainsi les paramètres d'une loi normale ne sont autres que la moyenne et l'écart-type de celle-ci



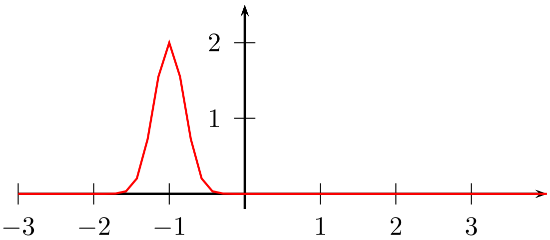
preuve :
On rappelle que pour une variable aléatoire X, on a $E(aX+b) = aE(X)+b$ et $\sigma(aX+b) = |a|\sigma(X)$ vu en première pour les lois discrètes. Ces résultats ce généralisent aux lois continues.
Donc si $X \rightsquigarrow \mathcal{N}(m;\sigma^2)$, on a $T = \dfrac{X-m}{\sigma} \rightsquigarrow \mathcal{N}(0;1)$, or $X = \sigma T + m$ donc $E(X) = \sigma E(T) + m = m$ car $E(T) = 0$ et $\sigma(X) = |\sigma|\sigma(T) = \sigma$ car $\sigma(T) = 1$ et que $\sigma > 0$
CQFD

Cette loi est celle qui rend compte de diverses mesures d'une grandeur donnée, opérées à diverses reprises, chaque mesure étant sujette à des erreurs.

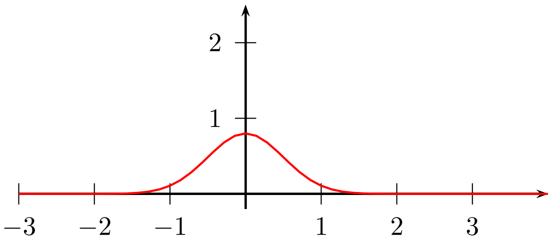
La loi normale (ou de Laplace-Gauss, appelée ń normale ż par Pearson en 1893) est la loi de certains phénomènes continus qui fluctuent autour d'une valeur moyenne m, de manière aléatoire, résultante d'un grand nombre de causes indépendantes dont les effets s'ajoutent sans que l'un d'eux soient dominant :

par exemple la taille d'un individu en cm, influencée par le sexe, la nourriture, l'environnement, l'hérédité, le lieu géographique ...

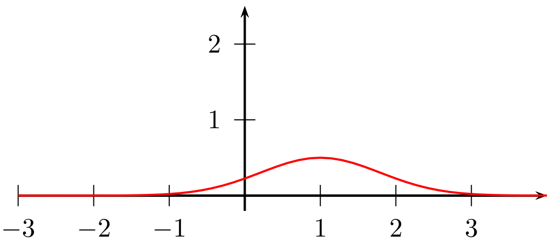
Voici des exemples de courbes pour quelques valeurs de m et σ :



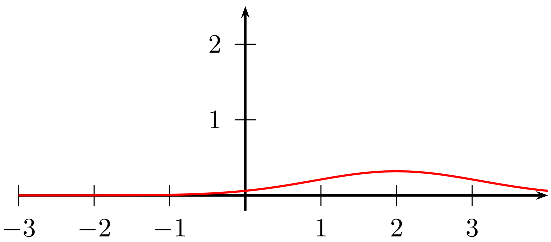
$m = -1$ et $\sigma = 0,2$



$m = 0$ et $\sigma = 0,5$



$m = 1$ et $\sigma = 0.8$



$m = 2$ et $\sigma = 1.1$

I.6.3 intervalles remarquables : plage de normalité

Intervalles remarquables
Si X suit la loi normale de paramètres m et σ, alors

- $P(m-\sigma \leq X \leq m+\sigma) \approx 0,68$.
- $P(m-2\sigma \leq X \leq m+2\sigma) \approx 0,95$.
- $P(m-3\sigma \leq X \leq m+3\sigma) \approx 0,997$.

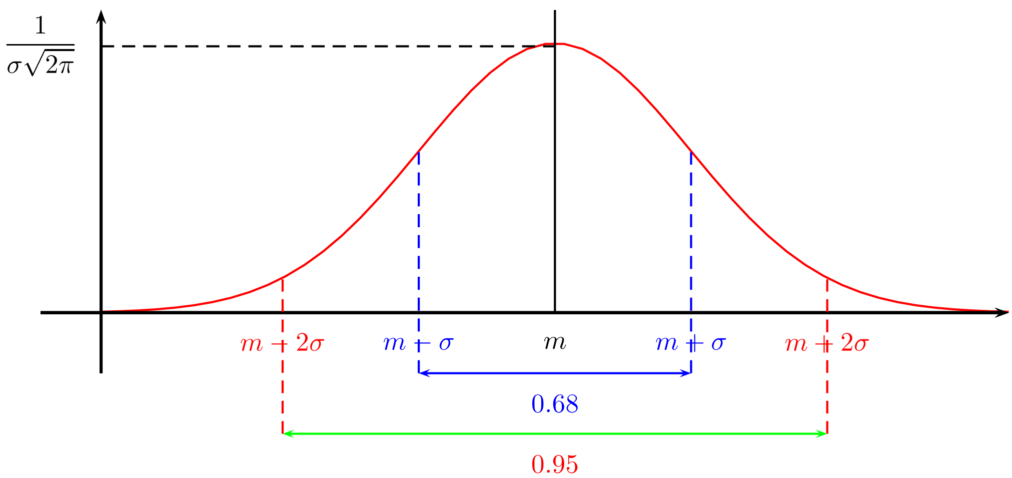
Démonstration :

$T = \dfrac{X-m}{\sigma} \iff X = m + \sigma T$.

Donc, pour $t > 0$, $P(-t \leq T \leq t) = P(-\sigma t \leq \sigma T \leq \sigma t)$
$= P(m-\sigma t \leq m+\sigma T \leq m+\sigma t)$
$= P(m-\sigma t \leq X \leq m+\sigma t)$.

Ainsi, en particulier :
$P(m-\sigma \leq X \leq m+\sigma) = P(-1 \leq T \leq 1) \approx 0,68$.
$P(m-2\sigma \leq X \leq m+2\sigma) = P(-2 \leq T \leq 2) \approx 0,95$.

Interprétation graphique :



Deuxième partie

Lois Normales : Exercices et recherche de paramètres