I Définition

II Propriétés algèbriques

On va lister ici les propriétés algébriques de la fonction $\ln$: soient a et b deux réels strictement positifs :

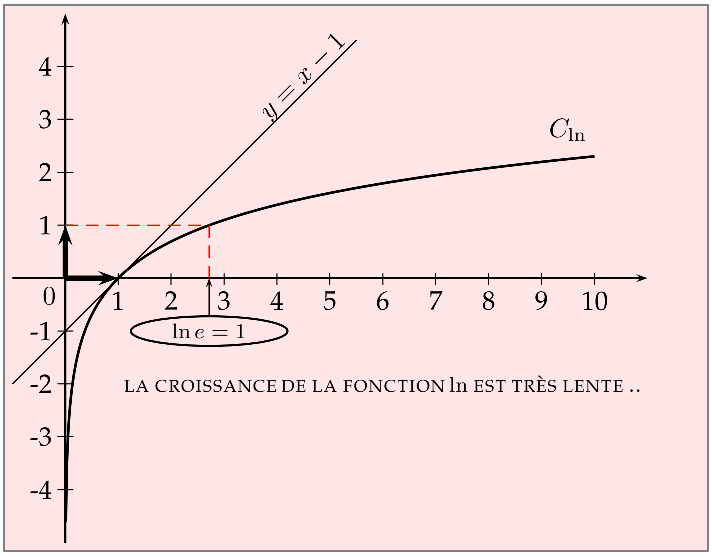
$\ln(ab) = \ln a + \ln b$	$\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$	$\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
$\forall n \in \mathbb{Z}\,,\ \ln(a^n) = n \ln a$	$\forall x \in \mathbb{R}\,,\ \ln(a^x) = x \ln a$	$\ln(\sqrt{a}) = \frac{1}{2} \ln a$

PREUVES :

✂ ....

III étude de la fonction $\ln$

III.1 courbe et conséquences



- on a $\forall x \in \mathbb{R}_+^*$ $\boxed{\ln'(x) = \frac{1}{x} > 0}$ donc la fonction $\ln$ est continue,dérivable et strictement croissante sur $]0; +\infty[$
- Ceci nous amène à :
  1. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$:
     $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$
  2. $\forall (a,b) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$:
     $\ln a > \ln b \Leftrightarrow a > b$

III.2 Des limites importantes

- $\lim\limits_{x \to +\infty} \ln x = +\infty$
- $\lim\limits_{x \to 0} \ln x = -\infty$
- $\lim\limits_{x \to 1} \frac{\ln x}{x - 1} = 1$
- $\lim\limits_{x \to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

III.3 tableau de variations et signe

x	0		1		$+\infty$
$\ln$	$-\infty$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
signe de $\ln x$		$-$	0	$+$	

IL FAUT ABSOLUMENT CONNAITRE LE SIGNE DE $\ln x$ POUR TOUT x POSITIF :

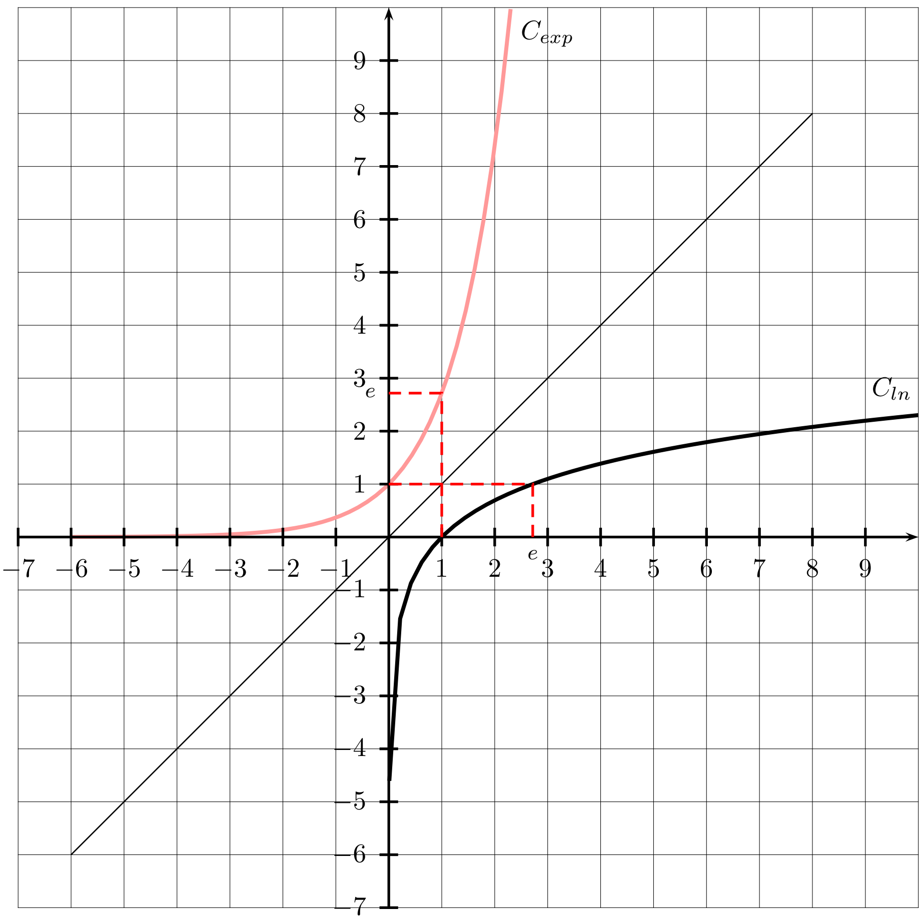
- $\forall x \in]0;1[\ , \ \ln x < 0$
- $\forall x \in]1;+\infty[\ , \ \ln x > 0$

• On a bien sur $\ln 1 = 0$

IV Lien avec la fonction exponentielle

• On a $\forall x \in \mathbb{R}\ , \ \ln(\mathbf{e^x}) = \mathbf{x}$ avec en particulier $\ln \mathbf{e} = \mathbf{1}$

• $\forall x \in]0;+\infty[\ , \ \mathbf{e}^{\ln \mathbf{x}} = \mathbf{x}$ on dit alors que les fonctions ln et exp sont **réciproques** , c'est à dire que leurs courbes sont symétriques par rapport à la droite d'équation $y = x$



IV.1 résolution d'équations et d'inéquations

- $e^{x} = k \Leftrightarrow x = \ln k$, pour $k > 0$
- $\ln x = k \Leftrightarrow x = e^{k}$, pour tout k dans $\mathbb{R}$

• Ces remarques **sont très importantes**, et permettent de fournir les solutions d'équations ou d'inéquations *en* $\ln x$ *ou en* e^x............*(cf feuille d'exos)* !

V Croissances comparées

LES QUATRES LIMITES À CONNAITRE ET À SAVOIR REDÉMONTRER POUR $n = 1$:

pour tout n entier naturel non nul :
• $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$ • $\lim\limits_{x \to 0} x^n \ln x = 0$ • $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$ • $\lim\limits_{x \to -\infty} x^n e^x = 0$

REMARQUE :on peut le retenir en disant :
" la fonction exponentielle l'emporte sur toute puissance de x , et que toute puissance de x l'emporte sur la fonction logarithme népérien" donc a fortiori...........

✂ ....

VI Dérivées et Primitives

VI.1 Dérivée de $\ln u$

Soit u une fonction définie , dérivable et strictement positive sur I
la fonction $\ln u$ est dérivable sur I et $(\ln \mathbf{u})' = \dfrac{\mathbf{u}'}{\mathbf{u}}$

PREUVE :
✂ ....

VI.2 Primitive de $\dfrac{u'}{u}$

Soit u une fonction , définie , dérivable et ne s'annulant jamais sur I
une primitive sur I de $\dfrac{u'}{u}$ est la fonction $\ln |u|$.

PREUVE :
✂ ....