Cours de terminale S

Giorgio Chuck VISCA

13 mars 2016

INTÉGRALES

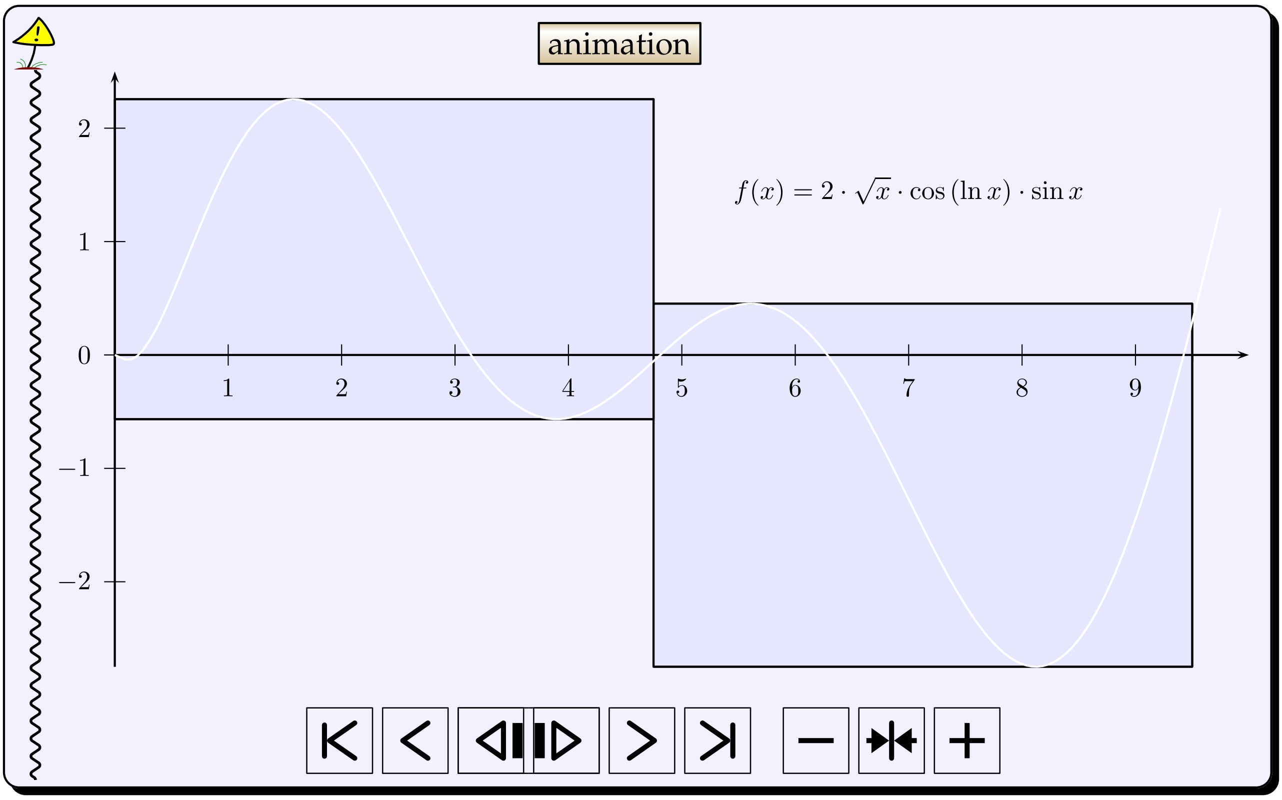
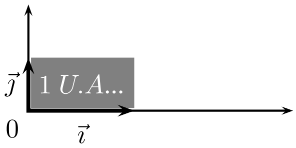


Table des matières

I Intégrale et aire

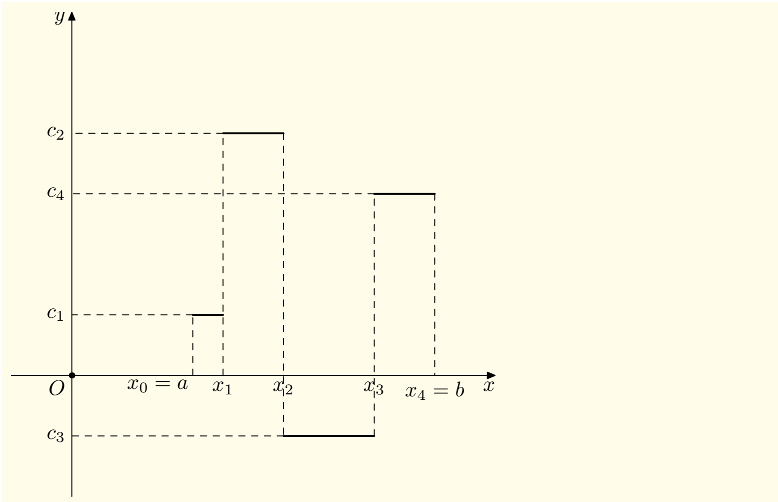
$(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ désigne un repère orthogonal , on appelle **unité d'aire** l'aire du rectangle défini par les deux vecteurs de bases $\vec{\imath}$ et $\vec{\jmath}$.



et on a : $\boxed{1\ U.A = ||\vec{\imath}|| \times ||\vec{\jmath}||}$

I.1 intégrale d'une fonction "étagée"

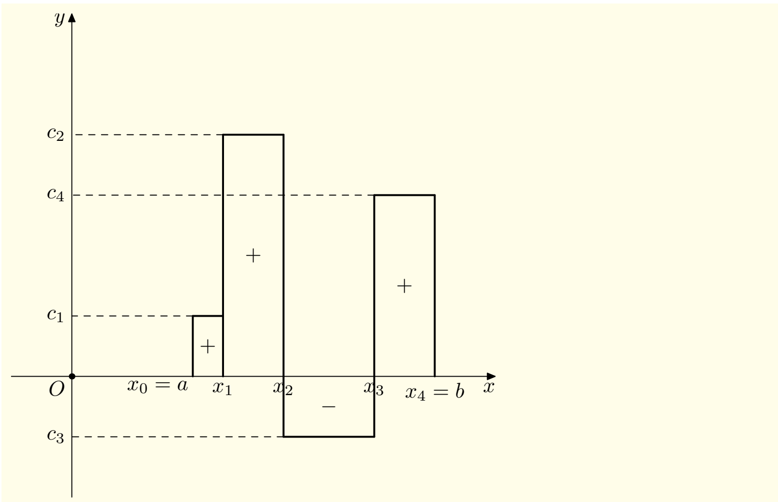
La fonction f définie sur $[a; b]$ et représentée ci-dessous est dite **fonction "étagée"** (*elle n'est donc pas jeune :D*) : elle est **constante par morceaux** sur $[a; b]$.



Par définition, **l'intégrale** de f sur l'intervalle $[a; b]$ est le réel

$$I(f) = (x_1 - x_0)c_1 + (x_2 - x_1)c_2 + (x_3 - x_2)c_3 + (x_4 - x_3)c_4 = \sum_{i=1}^{4}(x_i - x_{i-1})c_i$$

Autrement dit, l'intégrale de f sur $[a; b]$ est la somme des aires "algèbriques" (en u.a) des rectangles indiqués sur la figure, ces aires étant comptées :
• positivement pour les rectangles au-dessus de (Ox)
• négativement pour les rectangles en-dessous de (Ox).



Cas général

fonctions étagées

f est une fonction étagée s' il existe $n+1$ réels x_i dans $[a;b]$ avec $x_0 = a, x_n = b$ et $x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ tels que f est constante sur chaque intervalle ouvert $]x_{i-1};x_i[$. Si l'on note c_i la constante sur chacun de ces intervalles. On appelle intégrale de f sur $[a;b]$, le nombre noté $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ et défini par :

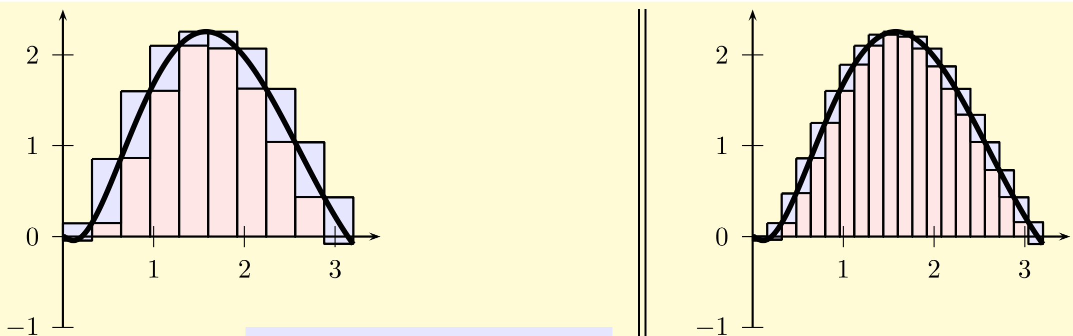
$$\int_a^b f(t)dt = \sum_{i=1}^{n}(x_i - x_{i-1})c_i$$

Autrement dit, $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est la somme algébrique des aires des rectangles définis par l'axe (Ox) et la courbe de f, ces aires étant comptées :
• positivement pour les rectangles au-dessus de (Ox)
• négativement pour les rectangles en-dessous de (Ox).

Remarques :
- Les images $f(x_i)$ n'interviennent pas dans ce calcul.
- Ce calcul ne dépend pas de la subdivision associée à f, une telle subdivision est dite par ailleurs "adaptée" à f.
- La lettre t dans l'écriture $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$ est dite " muette", on peut la remplacer par toute autre lettre, par exemple on peut écrire $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$, en effet elle n'intervient plus à l'issue des calculs.

I.2 définition

Nous admettrons que pour une fonction continue f sur $[a;b]$ on a le résultat suivant :
Pour toute fonction continue sur $[a;b]$ il existe deux suites de fonctions étagées (g_n) et (h_n) telles que :
- pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $x \in [a;b]$, $g_n(x) \leq f(x) \leq h_n(x)$
- les suites (s_n) et (S_n) définies par $s_n = \displaystyle\int_a^b g_n(t)dt$ et $S_n = \displaystyle\int_a^b h_n(t)dt$ sont convergentes et ont même limite l.



cas où $n = 10$ pour $f(x) = 2 \cdot \sqrt{x} \cdot \cos(\ln x) \cdot \sin x$ et ici le cas où $n = 20$ pour la même fonction.

Sur le dessin ci-dessus, on constate que les intégrales (s_n) et (S_n) convergent bien vers un même réel l, qui est l'aire algèbrique délimitée par la courbe et l'axe des abscisses sur l'intervalle où elle est tracée, il en découle :

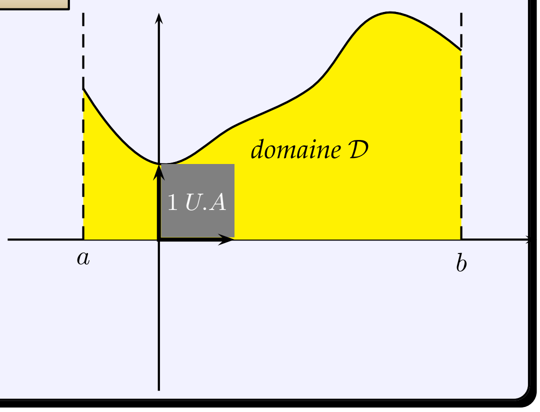
Définition

Cette limite l est l'intégrale de f sur $[a;b]$ que l'on note $\displaystyle\int_a^b f(t)dt$.

I.3 cas d'une fonction positive

Définition d'une intégrale

Soit f une fonction définie , **continue et positive** sur un intervalle $[a;b]$ et C_f sa courbe représentative dans un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath}\,)$. le réel $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ désigne l'aire en unités d'aire du domaine $\mathcal{D}$ défini par :
$\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ tels que $a \leqslant x \leqslant b\ ;\ 0 \leqslant y \leqslant f(x)\}$
c'est à dire du domaine délimité par l'axe des abscisses la courbe C_f et les droites d'équations : $x = a$ et $x = b$..



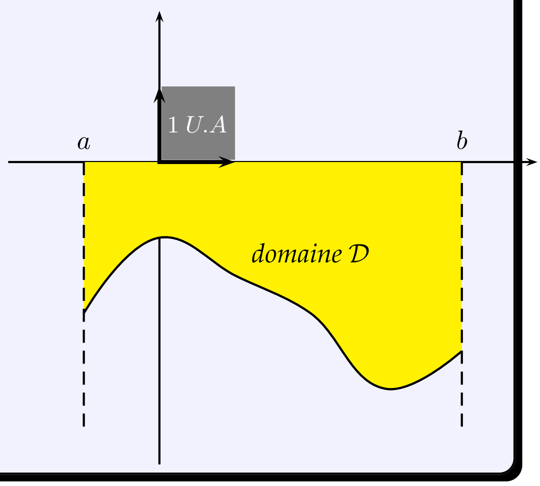
EXEMPLES :

✂ ....

I.4 cas d'une fonction négative

Fonction négative

Soit f une fonction définie , **continue et négative** sur un intervalle $[a;b]$ et C_f sa courbe représentative dans un repère $(O,\vec{\imath},\vec{\jmath}\,)$ .l'intégrale $I = \displaystyle\int_a^b f(x)dx$ est définie par $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\mathcal{A}$ où $\mathcal{A}$ est l'aire en $U.A$ du domaine $\mathcal{D}$ défini par :
$\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$ tels que $a \leqslant x \leqslant b\ ;\ f(x) \leqslant y \leqslant 0\}$
c'est à dire du domaine délimité par l'axe des abscisses la courbe C_f et les droites d'équations : $x = a$ et $x = b$..
on a alors $\mathcal{A} = -\displaystyle\int_a^b f(x)dx$

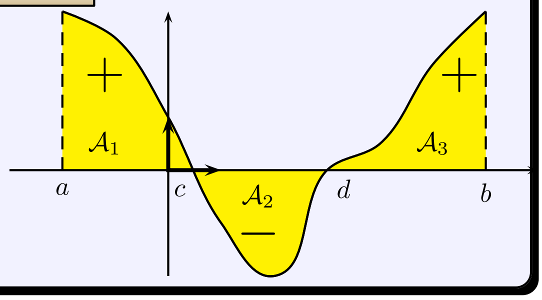


I.5 cas d'une fonction qui change de signe

Fonction qui change de signe

Ici $I = \int_a^b f(x)dx$ va compter les aires **algébriques** , donc positivement de a à c , négativement de c à d et positivement de d à b , on a en outre $I = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_3 - \mathcal{A}_2$ .... par contre si l'on désire évaluer l'aire hachurée à l'aide d'intégrales on écrira :

$\mathcal{A} = \int_a^c f(x)dx - \int_c^d f(x)dx + \int_d^b f(x)dx$



EXEMPLE SIMPLE POUR COMPRENDRE LE PRINCIPE :

1. calculer de façon très simple et en s'appuyant sur un graphique l'intégrale $I = \int_{-3}^{3} xdx$
2. on pose $f(x) = x$, calculer en unités d'aire , l'aire $\mathcal{A}$ du domaine délimité par les droites $x = 3$; $x = -3$;l'axe des abscisses et C_f.....

✂ ....

II primitives et intégrales

II.1 Théorème fondamental

Théorème fondamentale de l'analyse version primitive

Soit f une fonction **continue** sur un intervalle I , et soit a un élément de I .

La fonction Ψ définie sur I par $\Psi(x) = \int_a^x f(t)dt$ est **l'unique** primitive de f qui s'annule en a

REMARQUE :il faut distinguer la vraie variable x de la variable t dite **muette** *(comme l'oiseau.........)* , c'est à dire qui disparait à l'issue des calculs .....

on aurait pu écrire :$\Psi(x) = \int_a^x f(t)dt = \int_a^x f(u)du = \int_a^x f(schmurz)dschmurz$..........

• *Ce théorème absolument fondamental , nous fournit une méthode simple de calcul de l'intégrale d'une fonction continue en utilisant le résultat suivant :*

II.2 Calcul d'une intégrale en utilisant une primitive de f

Théorème fondamental version calcul d'intégrale

Soit f une fonction continue sur un intervalle I , pour tous réels a et b de I on a :

$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f sur I

PREUVE :

✂ ....

III propriétés

III.1 propriétés algèbriques

Propriétés

- **Chasles :** $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$
- **permutation des bornes :** $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$
- **linéarité :** $\displaystyle\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b f(x)dx$ où $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$
- **positivité :** Si f est une fonction **positive** sur I alors pour tous a et b tels que $a \leqslant b$ on a $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \geqslant 0$...
- **Intégrale d'une constante :** pour $k \in \mathbb{R}$ on a : $\displaystyle\int_a^b kdx = k(b-a)$

PREUVE :

....

III.2 intégrales et ordre

Ordre

résultat 1 :
Soient f et g deux fonctions **continues** sur un intervalle I , et soient a et b deux éléments de I tels que $a \leqslant b$.

Si $f \leqslant g$ sur $[a, b]$ **alors** $\displaystyle\int_a^b f(x)dx \leqslant \int_a^b g(x)dx$.

résultat 2 :
Si f est continue sur $[a, b]$ avec $a \leqslant b$ on a : $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant \int_a^b |f(x)|\, dx$

III.3 valeur moyenne , inégalité de la moyenne

Définition et propriété

Définition valeur moyenne :

on appelle valeur moyenne de la fonction f sur $[a,b]$ le réel noté μ et défini par : $\mu = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)dx$

Inégalité de la moyenne :
soient f continue sur $[a,b]$ avec $a < b$, et deux réels m et M tels que $m \leqslant f \leqslant M$ sur $[a,b]$

on a alors $m(b-a) \leqslant \displaystyle\int_a^b f(x)dx \leqslant M(b-a)$.

Un corollaire :

soient f continue sur $[a,b]$ et $M > 0$ tel que $|f| \leqslant M$ sur $[a,b]$, alors $\left|\displaystyle\int_a^b f(x)dx\right| \leqslant M|b-a|$

PREUVES :

IV Quelques calculs pratiques

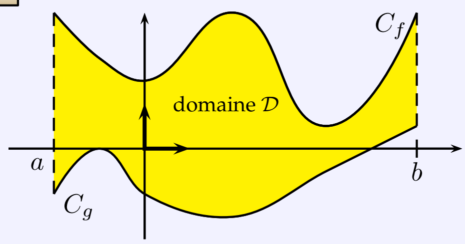
IV.1 Aire délimitée par deux courbes

Aire entre deux courbes

le domaine $\mathcal{D}$ représenté ci-contre est défini par :
$\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ tels que : $a \leqslant x \leqslant b;\ g(x) \leqslant y \leqslant f(x)\}$

son aire est donnée par $\mathcal{A} = \displaystyle\int_a^b f(x)dx - \int_a^b g(x)dx\ U.A$

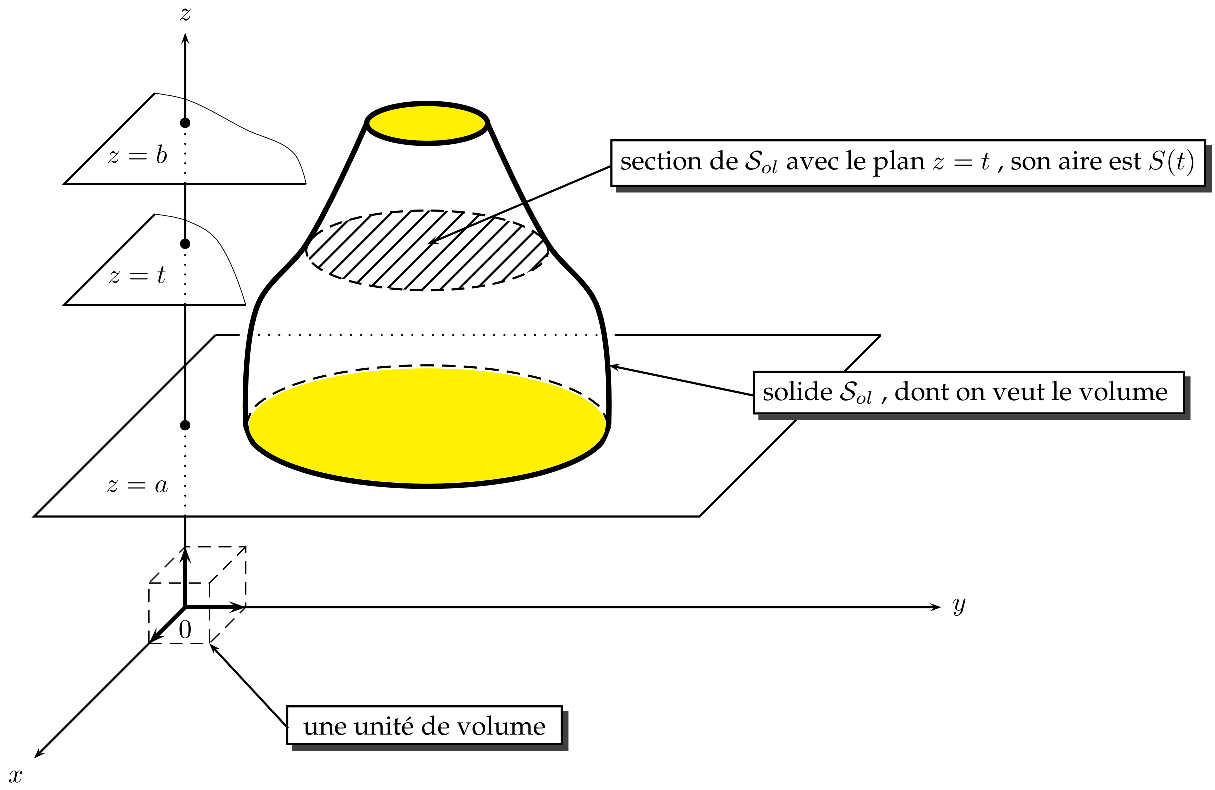
donc $\mathcal{A} = \displaystyle\int_a^b (f(x) - g(x))dx\ U.A$



REMARQUES :

- *Avant de calculer l'aire délimitée par deux courbes , il faut en connaitre la position relative*
- *Ce qui sous entend que prélablement vous aurez étudier le signe de $\Phi(x) = f(x) - g(x)$*
- *Pratiquement pour calculer cette aire , on découpe l'intervalle d'étude en repérant où C_f est au dessus ou en dessous de C_g*
- *De toutes façons , impossible de se gourer si vous retenez le fait que dans la différence on met d'abord la fonction la plus 'grande'*
- *Enfin , vous remarquerez mes petits , que l'on ne regarde ni le signe de f , ni le signe de g , mais uniquement le signe de la différence................à méditer*

IV.2 calcul de volumes



Soit $\mathcal{S}_{ol}$ un solide de $\mathbb{R}^3$, délimité par les deux plans parallèles à (xOy) d'équations respectives $z = a$ et $z = b$. Pour tout $t \in [a, b]$, le plan $z = t$ coupe le solide $\mathcal{S}_{ol}$ suivant une section d'aire $S(t)$ .....(bien évidemment cette aire dépend de la valeur de t.....)
et bien en supposant que la fonction «aire »S soit continue sur $[a, b]$, le volume du solide $\mathcal{S}_{ol}$ en unités de volume est donné par : $\boxed{V = \int_a^b S(t)dt}$