I Notions de fonctions

I.1 Définition

Une fonction f d'un ensemble I dans un ensemble J est un objet mathématique qui à tout élément de I associe un unique élément de J, noté $f(x)$.
– L'ensemble I est **l'ensemble de définition** de f.
– Le nombre $f(x)$ est **l'image** de x par la fonction f. C'est un élément de J.
– Le nombre x est **un antécédent** de $f(x)$ par f.

Notation :
Pour expliciter l'expression de la fonction ainsi que les ensembles qu'elle lie, on utilise la notation

$$\boxed{\begin{array}{cccc} f & : & I & \longrightarrow & J \\ & & x & \longmapsto & f(x) \end{array}}$$

1. **Exemple 1 :**
prenons la fonction f qui, à tout nombre réel x associe le nombre y défini comme le triple de x auquel on soustrait 1.
*On peut décrire cette fonction en utilisant une **expression algébrique** : la fonction f peut calculer l'image de n'importe quel nombre $x \in \mathbb{R}$, par $f(x) =$ ....*
*Alors l'**image** du nombre 5 est .... On note $f(5) =$ ....*
*De plus il existe un seul nombre dont l'image par f est égale à 8 : si x est un tel nombre, alors il doit vérifier l'égalité ...., ce qui nous donne $x =$ .... Le nombre 8 a donc un **antécédent** par f, qui est le nombre ....*

2. **Exemple 2 :**
prenons maintenant la fonction g qui, à tout nombre réel x associe le nombre y défini comme le carré de x augmenté de 3.
*On peut décrire cette fonction en utilisant une **expression algébrique** : la fonction f peut calculer l'image de n'importe quel nombre $x \in \mathbb{R}$ par $f(x) =$ ....*
*Alors l'**image** du nombre 5 est .... On note $g(5) =$ ....*
*De plus il existe deux nombres dont l'image par g est égale à 7 : si un tel nombre x existe, il vérifie l'égalité ...., qui est équivalente à .... Ceci nous laisse deux possibilités pour x : soit $x =$ ...., soit $x =$ .... Le nombre 7 a donc deux **antécédents** par g, qui sont les nombres .... et ....*
***Mais attention :** un nombre donné n'a pas toujours d'antécédent par une fonction donnée; par exemple, ici, le nombre 1 n'a pas d'antécédent par g. En effet si un tel antécédent x existait, il vérifierait $x^2 + 3 = 1$, c'est-à-dire $x^2 =$ ...... ce qui est impossible (un carré est toujours positif, n'est-ce pas ?).*

3. **Exemple 3 :**
Associer à tout nombre entier n un de ses diviseurs n'est pas une fonction. En effet, un entier peut avoir plusieurs diviseurs et donc plusieurs images par cette opération.
Par contre, associer à tout nombre entier positif le nombre de ses diviseurs positifs définit une fonction bien connue en arithmétique, appelée φ. Son ensemble de définition est l'ensembles des entiers positifs, noté $\mathbb{N}$. Par exemple, l'image de 6 par φ est 4 car 6 a 4 diviseurs qui sont $1, 2, 3, 6$.

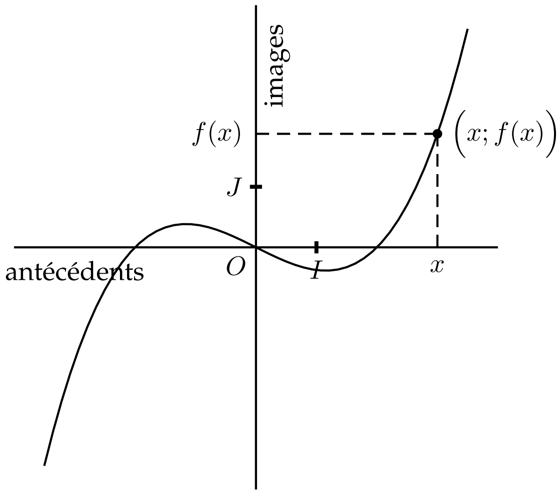
Exercice 1 :
On considère la fonction f définie par

$$\begin{array}{ccccc} f & : & \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{R}^+ \\ & & x & \longmapsto & 2x^2 + 4 \end{array}$$

1. Quel est l'ensemble de définition de f ?
2. Calculer l'image de 6 par f.
3. Déterminer l'antécédent de 4 par f, puis le ou les antécédents de 6 par f.
4. Le nombre 2, a-t'il au moins un antécédent par f ?

I.2 Représentation graphique

Soit f une fonction définie sur un ensemble D_f et (O, I, J) un repère du plan.
La **représentation graphique de la fonction f** est l'ensemble des points M du plan de coordonnées (x, y) avec $x \in D_f$ et $y = f(x)$. Cet ensemble est souvent noté C_f.



Pour une fonction f donnée on peut établir un tableau de valeurs ; dans ce tableau la première ligne contient des nombres réels x, et la seconde ligne contient leurs images respectives y.

Prenons pour exemple la fonction f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = x + \dfrac{2}{x}$, remplir le tableau suivant :

x	-4	-3	-2	-1	0.5	1	2	3
$f(x)$								

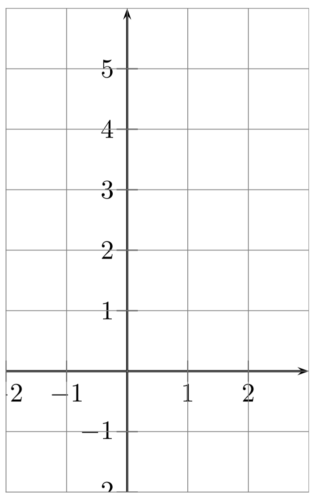
✂ ....

Exercice 2 :

Soit $f : \begin{array}{ccc} [-2;3] & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ x & \longmapsto & x^2 - x - 1 \end{array}$

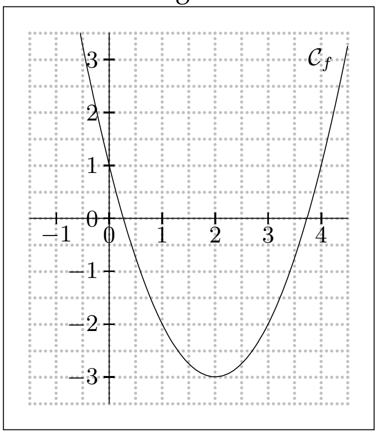
1. Dresser un tableau de valeur de la fonction f de **pas** 1 sur $[-2; 3]$.
2. Tracer la représentation graphique de f. (Unité 1 carreau sur chaque axe)
3. Le point A de coordonnées $(5, 18)$ appartient-il à C_f ?

x	-2	-1	0	1	2	3
$f(x)$						



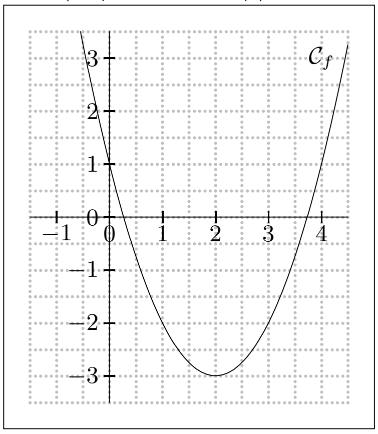
Exercice 3 :
Comment utiliser une représentation graphique pour la lecture d'images et d'antécédents :

trouver l'image d'un nombre



L'image de 1 par f est ......

trouver l'(les)antécédent(s) d'un nombre



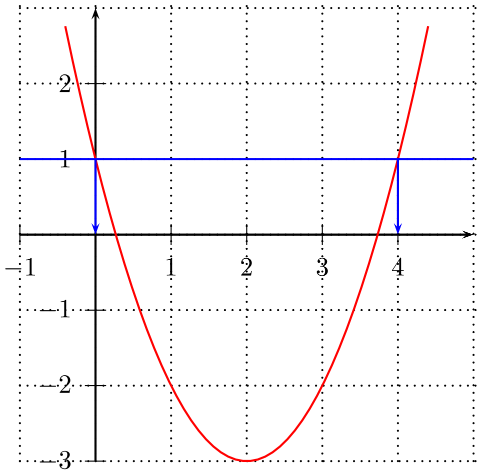
Les antécédents de 2 par f sont ...... et ...... environ

I.3 Résolution graphique d'équations du type $f(x) = k$

Résoudre une équation du type $f(x) = k$, où k est un nombre donné :
Chercher à déterminer les réels x qui vérifient l'équation $f(x) = k$, c'est chercher (s'ils existent) tous les antécédents de k par f ; graphiquement, cela revient à chercher les abscisses des points de la courbe représentative de f dont l'ordonnée est égale à k.

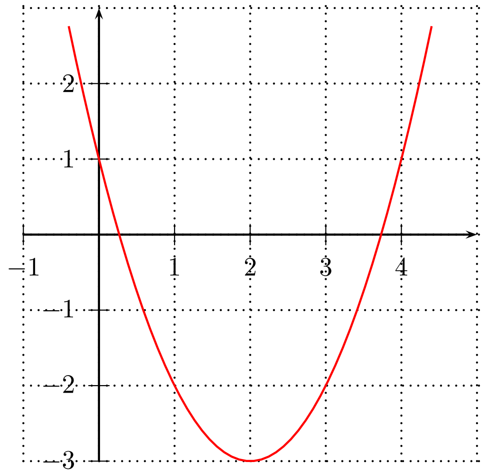
Exemples :

L'ensemble des solutions de $f(x) = 1$ est :



$S =$, car $f(.......) = ...$ et $f(........) = ...$

L'ensemble des solutions de $f(x) = -2$ est :



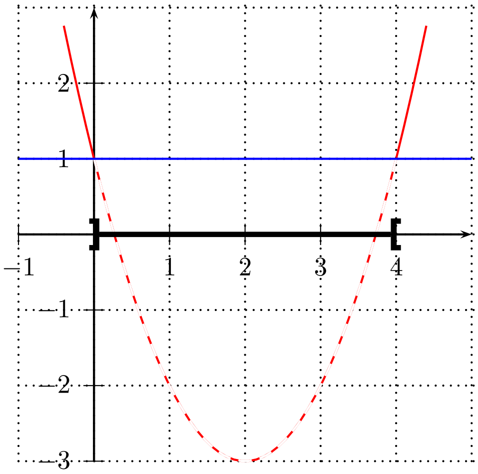
$S =$, car $f(.......) = ...$ et $f(........) = ...$

I.4 Résolution graphique d'inéquations du type $f(x) < k$ ou $f(x) > k$

Résoudre une inéquation du type $f(x) < k$, où k est un nombre donné :
Chercher à déterminer les réels x qui vérifient l'inéquation $f(x) < k$, c'est chercher (si elles existent) les abscisses des points de la courbe représentative de f dont l'ordonnée est inférieure à k. Concrètement, il suffit de repérer "l'endroit" du domaine de définition où la courbe est strictement en dessous de la droite d'équation $y = k$

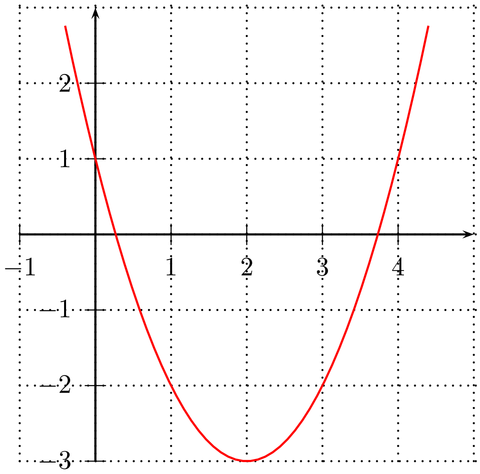
Exemples :
En supposant que la fonction tracée est définie sur $\mathbb{R}$:

L'ensemble des solutions de $f(x) < 1$ est :



$S =$

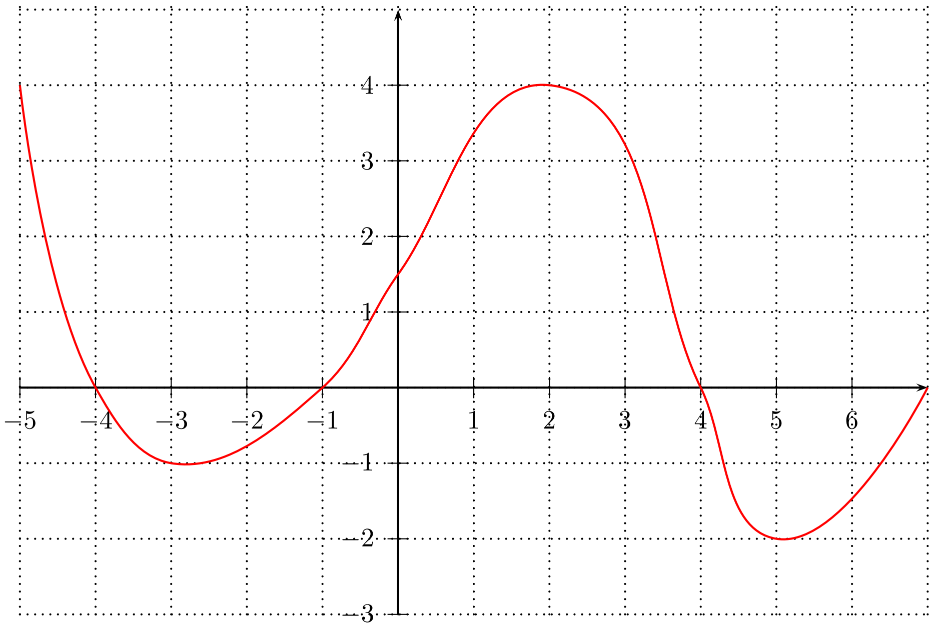
L'ensemble des solutions de $f(x) \geqslant -2$ est :



$S =$

Exercice 4 :

1. Résoudre, avec la précision permise par le graphique,l'équation et les inéquations suivantes : $f(x) = 0$, $f(x) < 0$ et $f(x) > 0$;
2. Que vient-on d'étudier concernant le nombre $f(x)$ selon la valeur de x ?
3. Présenter les résultats dans un tableau de signe de $f(x)$ sur $[-5; 7]$

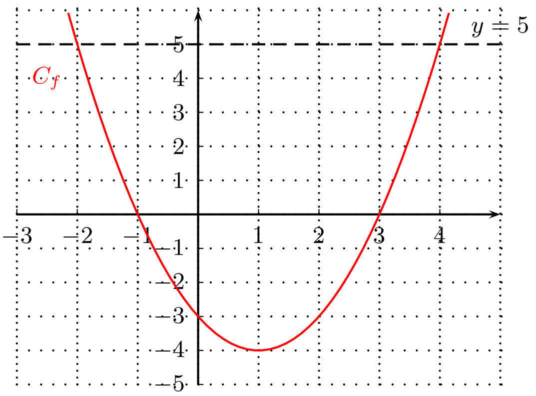


I.5 d'autres problèmes

Il y a des équations que l'on ne sait pas (encore en seconde) résoudre par le calcul. On utilise alors une méthode graphique pour avoir une approximation d'une solution.En voici quelques exemples :

Exemple 1 : Résoudre l'équation : $x^2 - 2x - 3 = 5$

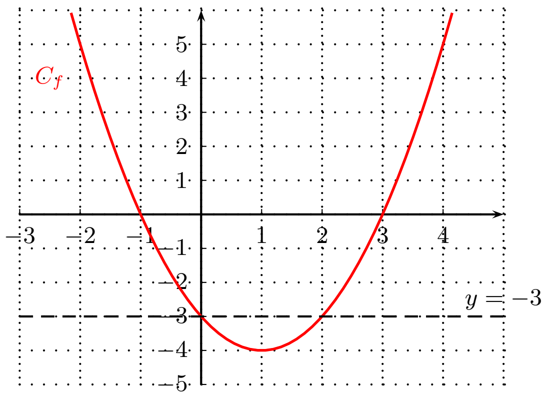
On trace la représentation graphique de la fonction : $f(x) = x^2 - 2x - 3$.



Résoudre l'équation $f(x) = 5$ revient à chercher les points qui ont pour image 5 par f.
Graphiquement, les solutions semblent être -2 et 4. On a donc ici :
$S =$

Exemple 2 : Résoudre l'inéquation : $x^2 - 2x - 3 \leqslant -3$

On trace la représentation graphique de la fonction : $f(x) = x^2 - 2x - 3$.

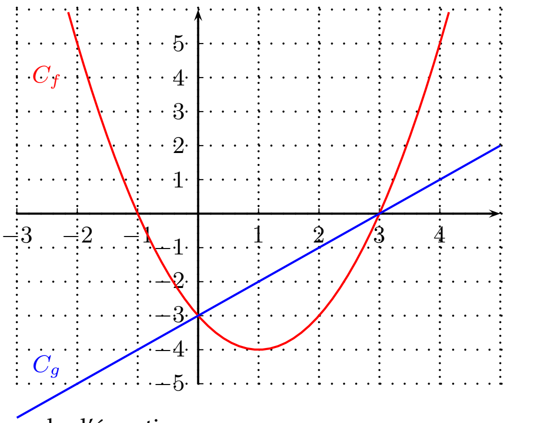


Résoudre l'inéquation $f(x) \leqslant -3$ revient à chercher les points qui ont une image inférieure à -3.
Graphiquement, les solutions semblent être tous les nombres compris entre 0 et 2 inclus. On a donc ici :
$S =$

....

Exemple 3 : Résoudre l'équation : $x^2 - 2x - 3 = x - 3$

On trace la représentation graphique de la fonction : $f(x) = x^2 - 2x - 3$ et de $g(x) = x - 3$.



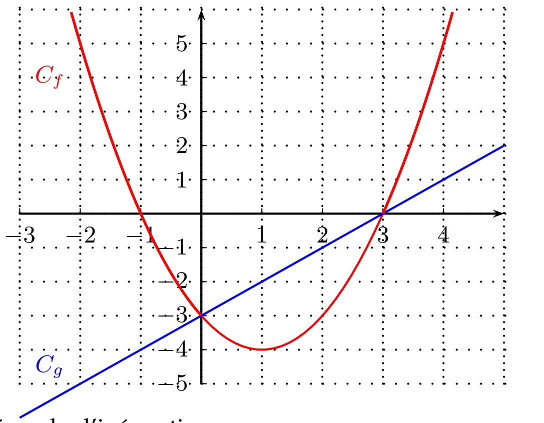
Résoudre l'équation

$$f(x) = g(x)$$

revient à chercher les points qui ont la même image par f et par g.
Graphiquement, cela revient à chercher les abscisses des points d'intersection de la courbe C_f et de la courbe C_g. On a donc ici :
$S =$

Exemple 4 : Résoudre l'inéquation : $x^2 - 2x - 3 > x - 3$

On trace la représentation graphique de la fonction : $f(x) = x^2 - 2x - 3$ et de $g(x) = x - 3$.



Résoudre l'inéquation

$$f(x) > g(x)$$

revient à chercher les points dont l'image par f est supérieure à l'image par g, c'est à dire les abscisses pour lesquels la courbe C_f est situé au dessus de la courbe C_g. Graphiquement, les solutions semblent être tous les nombres avant 0 exclus et après 3 exclus. On a donc ici :
$S =$

La méthode présente deux inconvénients :

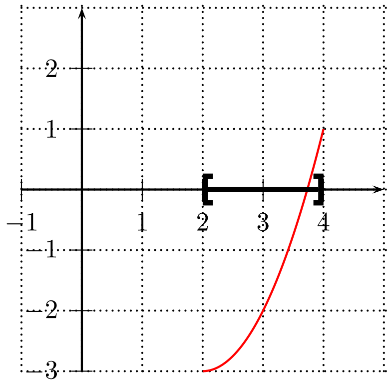
- La valeur obtenue par lecture graphique n'est qu'une approximation de la solution cherchée. Pour savoir si c'est la valeur exacte, il faut faire une vérification.
- La méthode ne donne que les solutions visibles dans la fenêtre affichée. Ainsi, on ne peut pas savoir si on a trouvé toutes les solutions où s'il en existe d'autres.

Cependant elle a un énorme avantage : il y a des équations que l'on ne sait pas (encore) résoudre par le calcul. On utilise alors une méthode graphique pour avoir une approximation d'une solution.

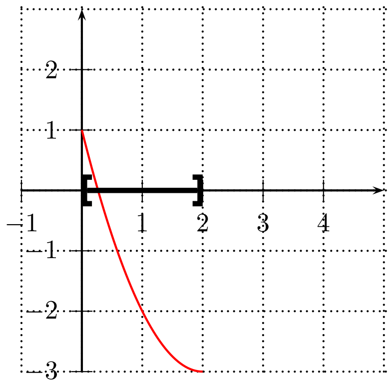
II Variations d'une fonction et extrema

II.1 Approche graphique

Fonction croissante sur un intervalle I :
Dire qu'une fonction est **croissante** sur un intervalle I signifie que les réels de cet intervalle et leur image sont rangés dans le même ordre.
Graphiquement, la courbe " monte " de la gauche vers la droite.



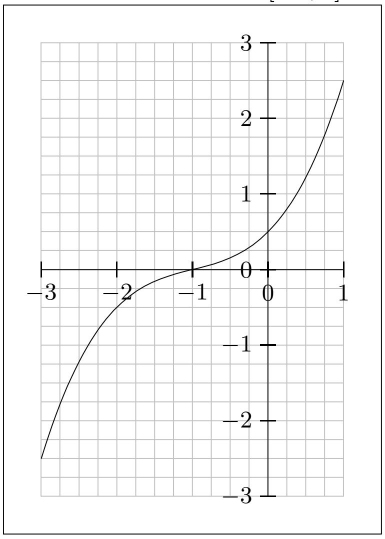
Fonction décroissante sur un intervalle I :
Dire qu'une fonction est **décroissante** sur un intervalle I signifie que les réels de cet intervalle et leur images sont rangés dans l'ordre contraire.
Graphiquement, la courbe " descend " de la gauche vers la droite.



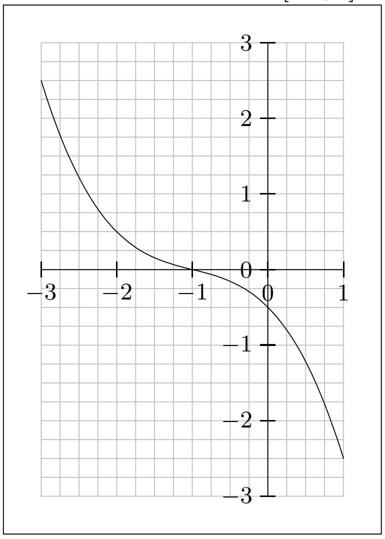
On dit que f est **monotone** sur un intervalle I lorsqu'elle est soit croissante, soit décroissante sur cet intervalle.

Exemples :

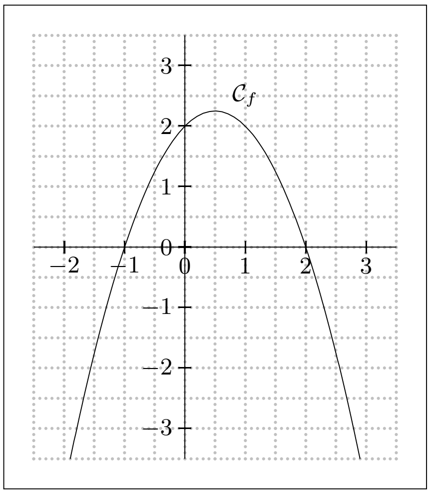
Fonction f
croissante sur $I = [-3; 1]$



Fonction f
décroissante sur $I = [-3; 1]$



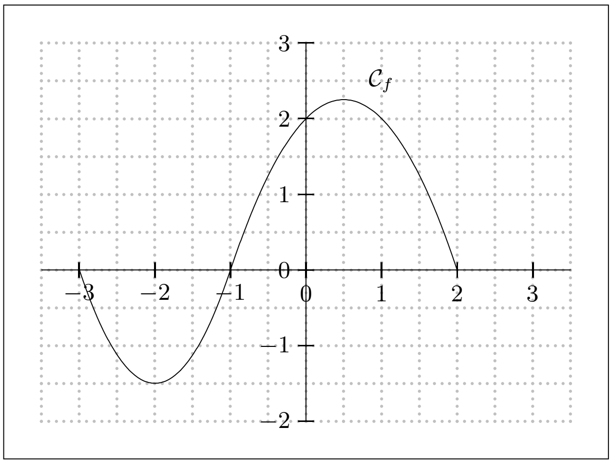
Donner les variations d'une fonction : il s'agit de préciser sur quels intervalles la fonction est croissante, puis sur quels intervalles la fonction est décroissante. Par exemple :



La fonction f, dont la courbe ci-dessus est la courbe représentative, est croissante sur ...., décroissante sur ....

II.2 extrema

Maximum-Minimum :
Le **maximum** d'une fonction sur un intervalle I est la plus grande valeur de $f(x)$ quand x décrit I .
Le **minimum** d'une fonction sur un intervalle I est la plus petite valeur de $f(x)$ quand x décrit I .



Le maximum de f sur $[-3;2]$ est $M \approx$ ...., atteint en ....
Le minimum de f sur $[-3;2]$ est $m =$ ...., atteint en ....
Attention ! la valeur d'un extremum dépend de l'intervalle ! Par exemple,
le minimum de f sur $[0;2]$ est $m =$ ...., atteint en ....

II.3 tableau de variations

Tableau de variation
Le **tableau de variation** d'une fonction f résume les variations de la fonction en partageant l'ensemble de définition de la fonction en intervalles sur lesquels la fonction est monotone.

Par exemple, le tableau de variations de la fonction f représentée ci-dessus est :

x	
variations de f	