Cours de Terminale S

Giorgio Chuck VISCA

27 octobre 2015

$\boxed{\textbf{EXPONENTIELLE}}$

Table des matières

I Fonction exponentielle

I.1 théorème

théorème

Le problème différentiel

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

admet une unique fonction solution

✂ ....

I.2 définition

définition

On appelle **fonction exponentielle**,notée exp , l'unique fonction solution sur $\mathbb{R}$ du problème différentiel

$$\begin{cases} y' = y \\ y(0) = 1 \end{cases}$$

Ainsi : $\forall x \in \mathbb{R}, \quad exp'(x) = exp(x)$ et $exp(0) = 1$

I.3 propriétés

Propriétés fondamentales

Pour tout x dans $\mathbb{R}$ on a :

- $exp(-x)exp(x) = 1$
- $exp(x) \neq 0$
- $exp(x) > 0$
- Pour tous réels a et b on a : $\boxed{exp(a+b) = exp(a) \times exp(b)}$
- Pour tous réels a et b on a : $\boxed{exp(a-b) = \dfrac{exp(a)}{exp(b)}}$
- Pour tout réel x, et tout entier relatif n on a : $\boxed{(exp(x))^n = exp(nx)}$
- la fonction **exponentielle** est strictement croissante sur $\mathbb{R}$

I.4 définition-notation

Nouvelle notation

On note **e** le nombre $exp(1)$, on a donc $\boxed{e = exp(1)}$.

pour tout réel x on note alors : $\boxed{exp(x) = e^x}$.

e est une constante dont une valeur approchée est $\boxed{e \approx 2,718}$

On résume alors les propriétés de l'exponentielle : pour tous a et b dans $\mathbb{R}$ et n dans $\mathbb{Z}$

$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}, \quad (e^x)' = (e^x)}$ $\boxed{e^0 = 1}$ $\boxed{e^x > 0}$ $\boxed{e^x \neq 0}$

$\boxed{e^x \times e^{-x} = 1}$ $\boxed{e^{(a+b)} = e^a \times e^b}$ $\boxed{e^{(a-b)} = \dfrac{e^a}{e^b}}$ $\boxed{(e^x)^n = e^{nx}}$

I.5 propriétés importantes

équations et inéquations

1. Ces propriétés découlent naturellement de la continuité et de la monotonie de la fonction exponentielle :

   $\boxed{\mathbf{e^a = e^b \iff a = b}}$ et $\boxed{\mathbf{e^a > e^b \iff a > b}}$ où $(a,b) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

2. Pour tout réel $k > 0$, il existe un unique élément x de $\mathbb{R}$ solution de $\boxed{\mathbf{e^x = k}}$. Ce réel sera noté $\boxed{\ln(\mathbf{k})}$ et nommé logarithme Népérien de k.

   On a donc Pour tout $k > 0$, : $\boxed{\mathbf{e^x = k \iff x = \ln(k)}}$

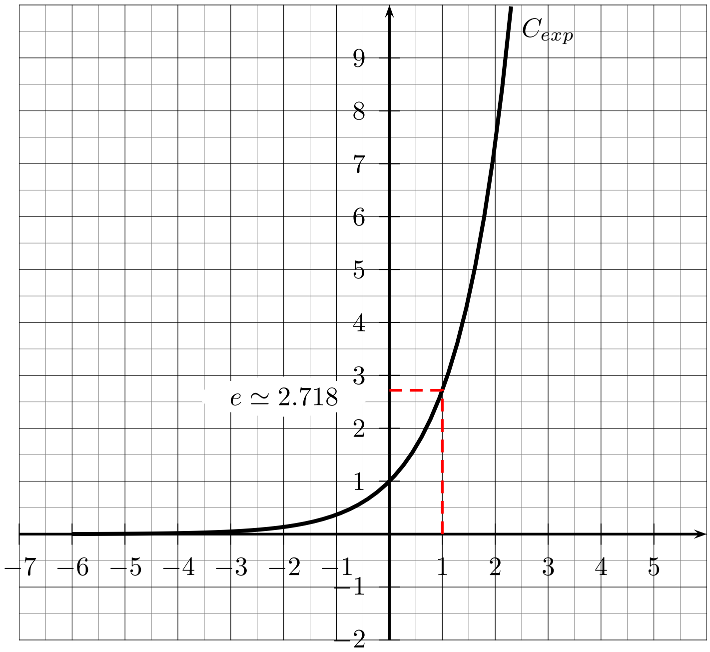
II courbe et limites

II.1 limites en $-\infty$ et en $+\infty$

limites

1. Je vous donne les résultats sur les limites en $-\infty$ et en $+\infty$, qui seront démontrées dans le cours sur les limites de fonctions. Ne vous concentrez que sur l'aspect numérique : que se passe t-il pour x très petit et très grand pour e^x à la calculatrice ?
2. **Limites aux bornes :** $\boxed{\lim\limits_{x \to +\infty} e^x = +\infty}$ et $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} e^x = 0}$

II.2 courbe représentative



II.3 Approximation affine et limite importante

Approximation en 0 et limite

L'équation de la tangente en 0 de la courbe représentative de la fonction exponentielle est donnée par $\boxed{y = x + 1}$.

La meilleure approximation affine de la fonction exponentielle en 0 étant la tangente, on aura $\boxed{e^x \underset{0}{\approx} x + 1}$.

On a par ailleurs le résultat suivant valable pour tout x réel :

$$e^x \geqslant x + 1$$

On retiendra aussi la limite suivante :

$$\lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

✂...

III composée et dérivée

Dérivée de la composée

Soit u une fonction **définie et dérivable** sur un intervalle I, alors la fonction $\boxed{e^u}$ est **dérivable** sur I et $\boxed{(e^u)' = u'e^u}$