Première partie
Rappels sur le calcul Littéral

I Calculer avec les fractions, les puissances, les radicaux

I.1 les fractions

I.1.1 généralités

Bon, il est temps que je rappelle quelques règles de base concernant le calcul avec les fractions :

1. Lorsque b est non nul, pour tout nombre c non nul on a : $\boxed{\frac{a}{b} = \frac{ac}{bc}}$
2. Lorsque b est non nul, $\boxed{\frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{a}{b}}$
3. Lorsque b et d sont non nuls, $\boxed{\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \quad \text{équivaut à} \quad ad = bc}$
4. Lorsque b, c, d sont non nuls,
   - Addition, soustraction (même dénominateur) : $\boxed{\frac{a}{b} + \frac{c}{b} = \frac{a+c}{b} \quad \text{et} \quad \frac{a}{b} - \frac{c}{b} = \frac{a-c}{b}}$
   - Multiplication : $\boxed{\frac{a}{b} \times \frac{c}{d} = \frac{ac}{bd}}$
   - Division : $\boxed{\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c} = \frac{ad}{bc}}$
   - réduction au même dénominateur : $\boxed{\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}}$

I.1.2 exemples

I.2 Les puissances

I.2.1 généralités

Définition : Soit n un entier naturel, soit a un nombre non nul quelconque : alors

$$a^n = \underbrace{a \times a \times a \times ... \times a}_{n facteurs}$$

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n} = \frac{1}{\underbrace{a \times a \times a \times ... \times a}_{n facteurs}}$$

Par convention, on pose $a^0 = 1$

Opérations sur les puissances :
Si a et b sont des nombres réels non nuls ; m et n sont des entiers relatifs quelconques (positifs ou négatifs), alors : $\boxed{a^m \times a^n = a^{m+n}}$ $\boxed{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$ $\boxed{(a^m)^n = a^{m \times n}}$ $\boxed{(a \times b)^n = a^n \times b^n}$ $\boxed{\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}}$

I.2.2 attention :

La somme $\boxed{a^n + a^m}$ **ne se simplifie pas**, on ne peut donc les ajouter, en effet :
$A = 3^1 + 3^2$ n'est sûrement pas égal à $B = 3^{1+2}$......... Il suffit de constater que $A = 12$ et que $B = 27$.

mais alors que faire si l'on a par exemple $x^2 + 3x^3$?
et bien, surtout on n'invente pas de théorie révolutionnaire pour tenter d'ajouter ces deux termes, on laisse l'expression ainsi.

I.2.3 exemples

I.3 Les radicaux

I.3.1 généralités

Définition : Soit a un nombre positif ; la **racine carrée** du nombre a, notée $\sqrt{a}$, est le nombre positif dont le carré est égal à a. On a donc $(\sqrt{a})^2 = \sqrt{a^2} = a$

Opérations sur les radicaux :
Lorsque a et b sont positifs,

- Multiplication : $\boxed{\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{a \times b}}$
- Division : si b est non nul, $\boxed{\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \sqrt{\dfrac{a}{b}}}$

I.3.2 attention :

il n'existe pas de règle pour l'addition ou la soustraction des radicaux : Ce qui signifie **que si a et b sont deux réels non nuls**, $\boxed{\sqrt{a+b} \text{ est différent de } \sqrt{a} + \sqrt{b}}$.
Tu veux un exemple PUBLIC ? et bien $\sqrt{4+9} = \sqrt{13} \approx$ ...., mais $\sqrt{4} + \sqrt{9} = 2 + 3 = 5$!

I.3.3 comment faire disparaitre des racines carrées au dénominateur d'une fraction ?

Si $a \geq 0$, $\quad \dfrac{1}{\sqrt{a}} = \dfrac{1 \times \sqrt{a}}{\sqrt{a} \times \sqrt{a}} = \dfrac{\sqrt{a}}{a}$

ou si $a - b \neq 0$: $\quad \dfrac{c}{\sqrt{a} + \sqrt{b}} = \dfrac{c \times (\sqrt{a} - \sqrt{b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b})(\sqrt{a} - \sqrt{b})} = \dfrac{c\sqrt{a} - c\sqrt{b}}{a - b}$

I.3.4 exemples

II savoir développer une expression littérale

II.1 les techniques

II.1.1 principe de base

- $\boxed{\text{Distribuer}}$, c'est transformer un produit de **FACTEURS**, en une somme de **TERMES**
- Tout repose sur les principes de base suivants :

$$\boxed{A \times (B + C) = A \times B + A \times C}$$

$$\boxed{(A + B) \times (C + D) = A \times C + A \times D + B \times C + B \times D}$$

REMARQUE : pour contrôler le nombre de termes du résultat, il suffit de multiplier le nombre de termes du premier facteur par celui du second

Par exemple : $(x^3 + 2x^2 + x + 3)(2x - 1)$ comportera à l'issue $4 \times 2 = 8$ termes avant réduction de l'écriture, c'est à dire avant d'ajouter tous les copains ensembles pour réduire un peu le résultat.

II.1.2 les identités remarquables

- Développer $(a + b)(a + b) =$ ....

$$\boxed{(a + b)^2 = \qquad\qquad\qquad\qquad}$$

- Développer $(a - b)(a - b) =$ ....

$$\boxed{(a - b)^2 = \qquad\qquad\qquad\qquad}$$

- Développer $(a + b)(a - b) =$ ....

$$\boxed{(a + b)(a - b) = \qquad\qquad\qquad\qquad}$$

III savoir factoriser une expression

III.1 en utilisant un facteur commun

- $\boxed{\text{FACTORISER}}$, c'est transformer une somme de **TERMES** en un produit de **FACTEURS**.
- La première technique consiste à utiliser le principe de distributivité :

$$\boxed{A \times B + A \times C = A \times (B + C)}$$

*On dit dans ce cas que l'on a **trouvé un facteur commun entre les deux termes**, et qu'on l'a mis en FACTEUR.*

Sur un exemple on verra mieux non ?

On donne $A = (2x + 1)(x - 1) - (2x + 1)(3x - 5)$

Ne voyez-vous pas un facteur commun entre les deux termes $(2x + 1)(x - 1)$ et $(2x + 1)(3x - 5)$?
mais si, regardez bien :
$A = \boxed{(2x + 1)}(x - 1) - \boxed{(2x + 1)}(3x - 5)$, alors ? heureux ?

Une fois repéré le **facteur commun** $\boxed{(2x + 1)}$, on le met en facteur en utilisant encore une fois le principe de distributivité rappelé plus haut :

$A = \boxed{(2x + 1)} \times [(x - 1) - (3x - 5)]$, et après simplification dans le grand crochet on obtient :

$\boxed{A = (2x + 1)(-2x + 4)}$ qui l'expression **FACTORISÉE** de A.

III.2 en faisant intervenir une identité remarquable

Deuxième partie
Les résolutions d'équations

IV Les équations du premier degré

IV.1 Définition

Soient a et b deux réels donnés. On appelle équation du premier degré d'inconnue x, toute équation pouvant se ramener à $ax + b = 0$.

IV.2 Exemples

IV.3 Rappels sur les égalité

Soient a, b, c et d quatre réels :

- $a = b \iff a + c = b + c$, ou encore $a = b \iff a - c = b - c$;
- $a = b \iff a \times c = b \times c$, pour $c \neq 0$;
- $a = b \iff \dfrac{a}{c} = \dfrac{b}{c}$ pour $c \neq 0$;
- $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \iff ad = bc$, pour $b \neq 0$, et $d \neq 0$.

IV.4 Principe de résolution

- si $a \neq 0$, l'équation $ax + b = 0$ admet comme solution $x = -\dfrac{b}{a}$ et l'on notera $S = \left\{-\dfrac{b}{a}\right\}$
- si $a = 0$ alors l'équation $ax + b = 0$ devient $b = 0$, qui n'a pas de solutions si $b \neq 0$, et une infinité si $b = 0$.

IV.5 exemples

Résoudre dans $\mathbb{R}$:

1. $3x + 1 = 5x - 5$
2. $\dfrac{2x - 1}{3} + 1 = \dfrac{2x}{3}$
3. $\dfrac{x - 3}{5} + \dfrac{1}{2} = \dfrac{2x + 3}{2}$
4. $3x = 0$

✂...

V Rappels des principes de développement et de factorisation

VI Les équations de degré supérieur à 1 : Rappels des principes de seconde

VI.1 Le cadre général

Ce sont des équations faisant intervenir l'inconnue x élevée à une certaine puissance, du type **polynomiale**, et que l'on tâchera de résoudre en utilisant dans la plupart des cas une factorisation afin de se ramener à un produit de facteurs nuls. On les appelle aussi équations produit. La puissance la plus grande intervenant dans l'équation est le degré de celle-ci.

VI.2 exemples

1. $x^2 - x(x-3) = 0$ est une équation a priori de degré 2, mais en fait elle est équivalente à $3x = 0$ qui est donc de degré 1 ;
2. $x^3 - 3x^2 = 0$ est une équation de degré 3 ;
3. $(x+1)(x+3) - 1 = 0$ est une équation de degré 2, car en developpant un terme en x^2 apparait ;

VI.3 Principes de Résolution

VI.3.1 Les rappels algébriques

Les identités remarquables :

- $(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$;
- $(x-y)^2 = x^2 - 2xy + y^2$;
- $x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$

Produit de facteurs nul :

- Soient $A(x)$ et $B(x)$ deux expressions algébriques.
  On a alors $A(x) \times B(x) = 0 \iff A(x) = 0$ ou $B(x) = 0$;

VI.3.2 Se ramener à une comparaison à 0

Pour résoudre une équation de degré supérieur à 1, on se ramène dans la majorité des cas à une comparaison à 0. Ainsi si l'équation est du type $A(x) = B(x)$, on écrira alors $A(x) - B(x) = 0$.

VI.3.3 Les cas où l'on peut utiliser directement un facteur commun :

Certaines équations de degré supérieur à 1, peuvent se résoudre en factorisant par un facteur commun, puis en se ramenant à un produit de facteurs nul

Les exemples : Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes

1. $(3x-1)(x+2) = (3x-1)^2$
2. $x^2 - 3x = 0$
3. $x(3x+1) - x^2 = 0$
4. $(x-1)(x-2)(3x+5) = (x-1)(x-2)(2-5x)$

VI.3.4 Les cas où l'on peut faire apparaitre un facteur commun :

Résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations suivantes :

1. $(3x-1)(x+2) = 9x^2 - 1$
2. $x^2 - 1 + (1-x)(2x+1) = 0$
3. $x^2 + 4x + 4 = (x+2)(x-3)$
4. $(x+1)(2x-3) + x(3-2x) = 0$

✂ ....

VI.3.5 le cas où les identités remarquables sont prépondérantes

Étude d'un cas particulier : la résolution de $X^2 = a$, avec a un réel donné.

1. si $a < 0$, alors l'équation n'a pas de solutions.
2. si $a = 0$, alors $X^2 = 0 \Longleftrightarrow X = 0$, puis conclure.
3. si $a > 0$, alors $X^2 = a \Longleftrightarrow X = \sqrt{a}$ ou $X = -\sqrt{a}$, puis conclure.
   On rappelle que pour tout $\boxed{a \textbf{ positif}}$, $\sqrt{a}$ est l'unique réel vérifiant $a = \sqrt{a^2} = (\sqrt{a})^2$

Les énoncés classiques : résoudre dans $\mathbb{R}$, les équations :

1. $(x+2)^2 = (4x-1)^2$
2. $(4x-5)^2 = 0$
3. $x^2 + 4 = 0$
4. $x^2 + 4x + 4 = 0$
5. $x^2 + 4x + 3 = 0$
6. $x^2 + 8x + 19 = 0$