Cours de Terminale S

Giorgio Chuck VISCA

30 septembre 2015

Continuité et Dérivabilité

Table des matières

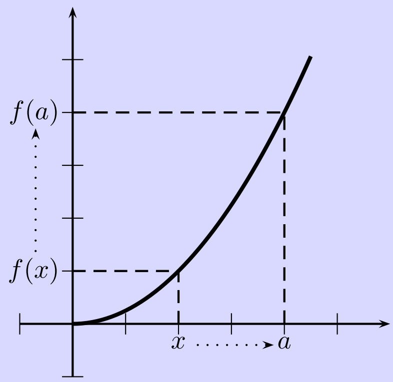
Première partie
la continuité

I continuité en un point,sur un intervalle d'une fonction

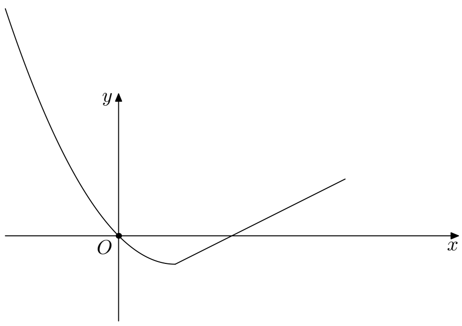
I.1 définition

Définition

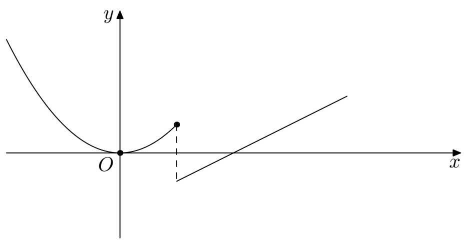
De façon très naïve, on dit d'un fonction qu'elle continue sur un intervalle I, lorsque sa courbe représentative peut être tracée sans lever le crayon de la feuille. Cela signifie en gros que sa courbe ne présente aucun "saut" ou "rupture".
Une notion ayant disparue des programmes officiels, permet de définir la continuité en un point a en disant que si x tend vers a, $f(x)$ doit tendre vers $f(a)$ ... (à méditer)



fonction continue



fonction non continue en un point



I.2 exemple et théorèmes généraux

I.2.1 exemples

1. La fonction inverse est-elle continue ?
2. Tracer le graphe de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^2 - x}{|x|}$ si $x \neq 0$, avec $f(0) = 0$, puis donner le domaine de continuité de f.

   On rappelle que $|x| = x$ si $x \geqslant 0$, et que $|x| = -x$ si $x \leqslant 0$

I.2.2 théorèmes généraux

Théorèmes

- Toute fonction polynome est continue sur $\mathbb{R}$.
- Toutes les fonctions circulaires sont continues sur leur ensemble de définition
- La fonction racine est continue sur $[0; +\infty[$.
- La somme, le produit, la composition de deux fonctions continues est continue.
- si f et g sont continues et si g ne s'annule pas alors $\dfrac{f}{g}$ est continue.
- En particulier, toute fonction rationnelle est continue sur son ensemble de définition.

✂ ....

I.3 la fonction partie entière

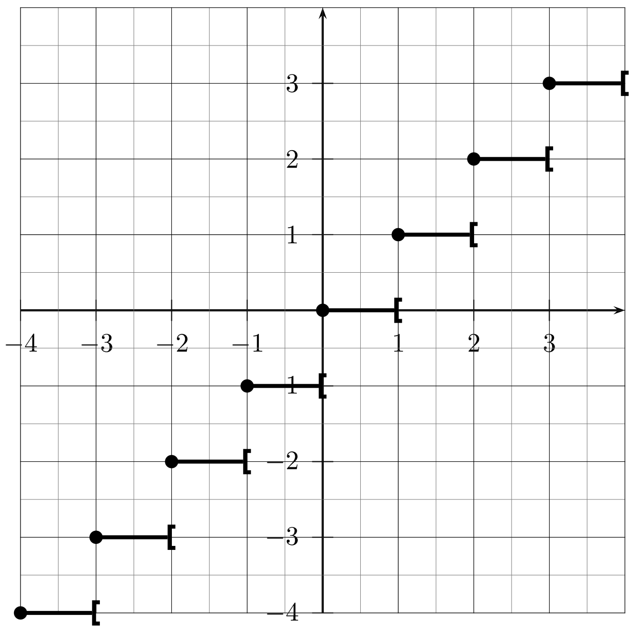
Définition

Soit x un nombre réel, le plus grand entier inférieur ou égal à x s'appelle la **partie entière** de x, nous le noterons $E(x)$.

Par exemple, on a $E(3.2) = 3$, $E(-3.2) = -4$, $E(\sqrt{2}) = 1$,...

La courbe ci-contre représente la fonction **partie entière**.
On constate bien la **discontinuité** de la fonction pour chaque valeur entière de x.
En effet : par exemple en 1, la limite *à gauche* vaut 0, et la limite *à droite* vaut 1 qui sont deux valeurs distinctes.

En conséquence la limite en 1 de la fonction n'existe pas et n'a aucune chance d'être égale à $f(1)$.



II théorème des valeurs intermédiaires

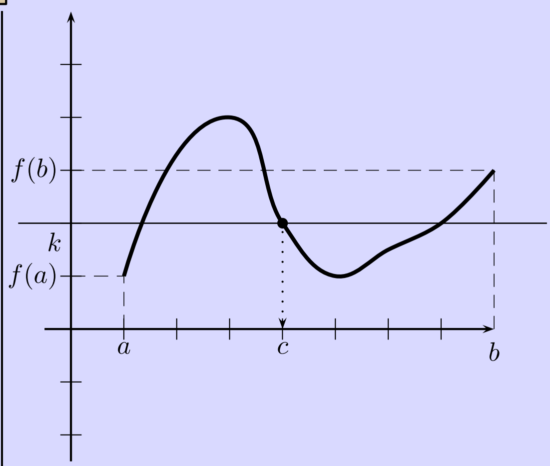
II.1 théorème des valeurs intermédiaires : existence d'au moins une solution

Théorème

Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I et a et b deux éléments de I,pour tout réel k compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe **au moins** un réel c compris entre a et b tel que $f(c) = k$

REMARQUE :

sur le dessin ci-contre, l'équation $f(x) = k$ admet plus d'une solution, en l'occurence trois, mais ce théorème fourni bien l'existence **d'au moins** une solution.........alors pour **l'unicité** regardez donc ce qui ce passe pour le corollaire.....

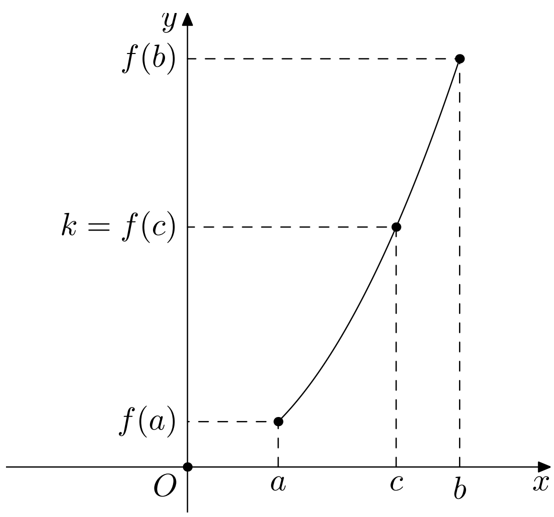


II.2 corollaire : existence et unicité

Corollaire

Soit f une fonction continue sur un intervalle I, et a et b deux éléments de I tels que $a < b$.
si f est **strictement monotone** sur $[a, b]$, alors pour tout réel k appartenant à $f([a, b])$, l'équation $f(x) = k$ admet une **unique** solution c dans l'intervalle $[a, b]$.

Cas f strictement croissante



Deuxième partie
la dérivabilité

III Dérivabilité d'une fonction en un point

III.1 définition

Définition

Définition 1

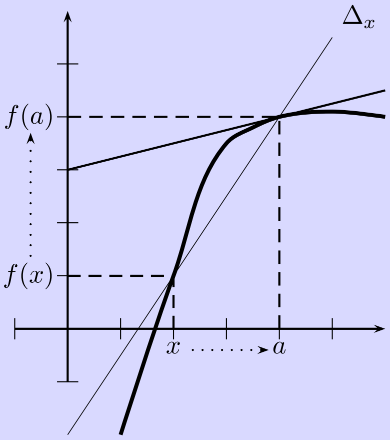
Soit f une fonction définie et continue sur un intervalle I .
On dit que f est **dérivable en** a lorsque $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie. On note alors $f'(a)$ cette limite, et on l'appelle **nombre dérivé de** f **en a**.
Donc si f est dérivable en a on a :

$$\boxed{\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a} = f'(a)}$$

Autre notation

si f est dérivable en a on a :

$$\boxed{\lim_{h \to 0} \frac{f(a+h)-f(a)}{h} = f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}}.$$



III.2 théorème

Théorème

On a l'implication suivante : $\boxed{f \text{ dérivable en } a \Longrightarrow f \text{ continue en } a}$
(attention la réciproque est fausse)

III.3 vocabulaire et interprétation graphique

III.3.1 vocabulaire

Définition

la quantité $\boxed{\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}}$, pour tout $x \neq a$, ou $\boxed{\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}}$, pour tout $h \neq 0$, est appelée : **taux d'accroissement de** f **en** a

III.3.2 interprétation graphique

équation de la tangente

Si f est dérivable en a, le nombre $f'(a)$ désigne alors le **coefficient directeur de la tangente à la courbe au point d'abscisse** a , il en découle alors l'équation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point a :

$\boxed{y = f'(a)(x-a) + f(a)}$

III.3.3 exemple graphique

✂ ....

IV fonction dérivée, formules de calcul

IV.1 définition

Définition

On rappelle que f est **dérivable** sur un **intervalle** I, lorsqu'elle est dérivable en tout point de I. L'ensemble $\mathcal{D}$ où f est dérivable est appelé **ensemble de dérivabilité de** f
On défini ensuite sur I la **fonction dérivée** de f notée f'.

IV.2 dérivées des fonctions usuelles

fonction f	domaine $\mathcal{D}_f$	**fonction dérivée f′**	domaine $\mathcal{D}'_f$
$f(x) = a$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = 0$	$\mathbb{R}$
$f(x) = ax + b$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = a$	$\mathbb{R}$
$f(x) = x^n$, où n est un entier relatif $\neq -1$	$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^*$	$f'(x) = nx^{n-1}$	$\mathbb{R}$ ou $\mathbb{R}^*$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$\mathbb{R}^*$	$-\frac{1}{x^2}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \frac{1}{x^n}$, où n est un entier naturel non nul	$\mathbb{R}^*$	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	$\mathbb{R}^*$
$f(x) = \sqrt{x}$	$[0; +\infty[$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$
$f(x) = \sin x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \cos x$	$\mathbb{R}$	$f'(x) = -\sin x$	$\mathbb{R}$
$f(x) = \tan x$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$	$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x$	$\mathbb{R} \setminus \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi\right\}$

IV.3 opérations sur les fonctions dérivables

Soient u et v deux fonctions définies et dérivables sur un intervalle I, et soit k un réel quelconque on a :

Dérivées et opérations

formules de dérivation	ensembles de validité
$\boxed{(u+v)' = u' + v'}$; $\boxed{(ku)' = ku'}$	sur I
$\boxed{(uv)' = u'v + v'u}$	sur I
$\boxed{\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}}$; $\boxed{\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - v'u}{v^2}}$	sur tout intervalle de I où $v \neq 0$

IV.4 composée et dérivée

IV.4.1 d'autres formules de dérivation

Résultats importants

✥SOIT u UNE FONCTION DÉFINIE ET DÉRIVABLE SUR I,
POUR TOUT ENTIER RELATIF n ON A : $\boxed{(u^n)' = nu'u^{n-1}}$

.....(*avec comme condition suplémentaire que* u *ne s'annule jamais sur* I *quand* n *est négatif*)

✥SOIT u UNE FONCTION DÉFINIE ET DÉRIVABLE SUR I, ET TELLE QUE $u > 0$ SUR I,
ON A ALORS : $\boxed{(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}}$

IV.4.2 théorème *(non exigible)*

Dérivée et composée

Soit f une fonction définie et dérivable sur un intervalle I, et u une fonction définie et dérivable sur un intervalle J, telle que $u(J) \subset I$, alors la fonction $h = f \circ u$ est dérivable sur J et pour tout x de J on a :
$\boxed{\mathbf{h'(x) = (f \circ u)'(x) = u'(x) \times f' \circ u(x)}}$

en gros $\mathbf{(f \circ u)' = u' \times f' \circ u}$

IV.4.3 Résultats à connaître

Résultats à connaître

Soit u une fonction dérivable sur une partie D de $\mathbb{R}$. On pose pour tout x de $\mathbb{R}$, $\boxed{f(x) = u(ax+b)}$ avec $a \neq 0$. Alors la fonction f est dérivable pour tout réel x tel que $ax+b \in D$ et $\boxed{f'(x) = au'(ax+b)}$.
Il découle de ce résultat, que pour tout x réel :
La dérivée de $\boxed{\sin(ax+b)}$ est $\boxed{a\cos(ax+b)}$

La dérivée de $\boxed{\cos(ax+b)}$ est $\boxed{-a\sin(ax+b)}$

IV.4.4 exemples de calculs

Calculer la dérivée des fonctions suivantes dérivée

1. $f(x) = \sin\left(3x + \frac{\pi}{6}\right)$
2. $g(t) = \sqrt{3t^4 + 2t^2 + 1}$
3. $h(x) = (2x^2 + 3x - 1)^5$
4. $i(x) = (\sin(3x+5))^6$

V applications de la dérivation et compléments

V.1 étude des variations

Théorème

Soit f définie et dérivable sur un intervalle I

- Si pour tout x de I on a $f'(x) > 0$ alors f est strictement croissante sur I
- Si pour tout x de I on a $f'(x) < 0$ alors f est strictement décroissante sur I
- Si pour tout x de I on a $f'(x) = 0$, alors f est constante sur I.

V.2 compléments

V.2.1 écriture différentielle

notation

la notation $\frac{df}{dx}$ est l'**écriture différentielle** de $f'(x)$..........
par exemple si l'on pose $x(t) = 2t^3 + 3t - 1$, où la variable est ici t et la fonction est x, on aura $x'(t) = 6t^2 + 3$.....
avec l'écriture différentielle on note $\frac{dx}{dt} = 6t^2 + 3$.

écrire la dérivée des fonctions suivantes en utilisant l'écriture différentielle :

1. $f(t) = \frac{3t+1}{2t-2}$
2. $x(t) = \frac{1}{\tan t}$
3. $f(x) = \sqrt{x}\sin x$
4. $g(v) = v^3 - 4v^2 + 7v - 5$

V.2.2 dérivées successives