Rappels sur les complexes et compléments

Giorgio Chuck VISCA

30 septembre 2015

LES COMPLEXES

Table des matières

Première partie
une introduction aux complexes

À la Renaissance, les mathématiques, et surtout l'algèbre, se développent rapidement en Italie, sur la base de l'héritage gréco- arabe. Les premiers progrès s'effectuent sur le terrain du symbolisme, de plus en plus concis et suggestif. Nicolas Chuquet et Luca Pacioli présentent sous une forme concise les résultats classiques. C'est celui-ci qui introduit la notation "cossique" des équations algébriques. Jusqu'au XVIIe siècle, beaucoup s'attachent à perfectionner un symbolisme, qui atteint à peu près sa forme actuelle avec Descartes... Mais le grand apport des mathématiciens italiens à l'algèbre est la résolution par radicaux des équations de degré 3 et 4

À la toute fin du XVe siècle, Scipione dal Ferro parvient à l'expression par radicaux des racines de l'équation cubique sans terme en x^2 *(ce qui est équivalent à la résolution complète, mais il semblerait qu'il ne le savait pas)*. Quoi qu'il en soit, dans une tradition médiévale un peu surannée, il choisit de garder sa découverte secrète. Il la confie à sa mort à son élève Fior qui ne la divulgue pas. En 1535, Tartaglia, établi à Venise comme professeur de mathématiques, propose une méthode de résolution des équations cubiques sans terme en x, mais Fior lui en conteste la priorité. Ce genre de querelles se réglaient en des défis. Fior met Tartaglia au défi de résoudre l'équation sans terme en x^2, et celui-ci y parvient, assurant sa victoire.

Quelques années plus tard, un médecin et mathématicien milanais, Cardan, vient trouver Tartaglia pour obtenir l'autorisation de publier ses formules dans sa grande somme mathématique, l'"Ars Magna" (1545). Tartaglia refuse, mais devant l'insistance de Cardan, il consent à lui exposer sa méthode, avec la promesse qu'elle ne sera pas publiée. Malgré tout, les fameuses "formules de Cardan" apparaissent bien dans l'"Ars Magna", et une violente querelle s'ensuit qui ne prend fin qu'en 1548. On trouve également dans le traité de Cardan la solution de l'équation générale de degré 4 que l'on peut attribuer avec certitude à l'élève de Cardan, Ferrari (auquel on pense en fait devoir un grand nombre des résultats publiés par Cardan)...

Une particularité de la méthode de Tartaglia est de faire intervenir, au cours du calcul, des racines carrés de nombres négatifs, ce qu'il avait du mal à prendre en considération. Le premier à avoir véritablement admis les complexes en tant que nombres, plutôt qu'artifices calculatoires, est Bombelli. Il présente les règles générales de calcul sur les complexes et toutes les récents progrès de l'algèbre peu avant sa mort, dans "Algebra, parta maggiore dell'arithmetica" (1572).

La formule dite de "CARDAN"

Le problème était donc de donner une solution à l'équation :

$$\boxed{x^3 + px = q}$$

Voici donc les formules dites de Cardan proposant une solution au problème :

$$\boxed{x = \sqrt[3]{\frac{q - \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}} + \sqrt[3]{\frac{q + \sqrt{q^2 + \frac{4p^3}{27}}}{2}}}$$

Bombelli n'a pas peur, il applique la formule à la résolution de l'équation :

$$\boxed{x^3 = 15x + 4}$$

Il obtient $x = \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}} + \sqrt[3]{2 - 11\sqrt{-1}}$ comme solution du problème.
Bien entendu, il ne s'affole pas voyant qu'il trimbale des racines de nombres négatifs, et remarque alors en conservant les propriétés algèbriques dans $\mathbb{R}$ que :

$$(2 + \sqrt{-1})^3 = 2 + 11\sqrt{-1} \quad \text{et} \quad (2 - \sqrt{-1})^3 = 2 - 11\sqrt{-1}$$

sa solution devient alors $x = 2 + 11\sqrt{-1} + 2 - 11\sqrt{-1}$ c'est à dire $x = 4$.

Ah oui, une dernière chose : à propos de la notation $\sqrt{-1}$.

Si le Peufien effectue $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1}$ ça fait quoi ?....attention deux secondes de réflexion...... !

et bien c'est pas si évident que ça finalement car $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = -1$ par définition de la racine, mais on peut aussi bien écrire $\sqrt{-1} \times \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)^2} = \sqrt{1} = 1$.....
ça voudrait dire que $1 = -1$?

On va noter $i = \sqrt{-1}$ ce fameux nombre "imaginaire".
On lève ainsi toute ambiguité au niveau des notations car i est défini comme vérifiant $i^2 = -1$.... !

Deuxième partie
le cours

I définitions

On admet qu'il existe un sur-ensemble de $\mathbb{R}$, appelé ensemble des nombres complexes noté $\mathbb{C}$, dont les éléments sont appelés $\boxed{\text{nombres complexes}}$ et qui vérifie les propriétés suivantes :

- $\mathbb{C}$ contient un élément noté i tel que $\boxed{i^2 = -1}$
- Les éléments de $\mathbb{C}$ sont de la forme $\boxed{z = x + iy, \text{ où } x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}}$
- Les propriétés d'addition et de multiplication prolongent celles de $\mathbb{R}$

I.1 vocabulaire

- Tout élément de $\mathbb{C}$ s'écrit sous la forme $z = x + iy$ où $x \in \mathbb{R}$ et $y \in \mathbb{R}$.
- Cette forme est appelée $\boxed{\text{Forme algèbrique}}$ du nombre complexe z.
- Le réel x est appelé $\boxed{\text{Partie réelle de z}}$
- Le réel y est appelé $\boxed{\text{Partie imaginaire de z}}$. On note alors $\boxed{x = \Re e(z) \text{ et } y = \Im m(z)}$
- Lorsque $y = \Im m(z) = 0$, on a alors $z = x$ qui est donc un nombre réel.
- Lorsque $x = \Re e(z) = 0$, on a $z = iy$ et z est appelé $\boxed{\text{imaginaire pur}}$.
  L'ensemble des imaginaires purs est parfois noté $i\mathbb{R}$.

I.2 égalité

- Soit $z = x + iy$. On a $\boxed{z = 0 \iff x = 0 \text{ et } y = 0.}$
- Soient $z = x + iy$ et $z' = x' + iy'$. On a $\boxed{z = z' \iff x = x' \text{ et } y = y'.}$

II somme et produit de deux nombres complexes

Soient $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$ deux nombres complexes quelconques.
La somme et le produit de deux nombres complexes sont des nombres complexes de formes algèbriques respectives :

- $\boxed{z + z' = (a + a') + i(b + b')}$
- $\boxed{z \times z' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)}$

III Conjugué d'un nombre complexe

III.1 définition

Soit z un nombre complexe , on a donc $\boxed{z = x + iy\text{, où } x \in \mathbb{R} \text{ et } y \in \mathbb{R}.}$
On appelle $\boxed{\text{conjugué du nombre complexe } z}$, le nombre complexe noté $\overline{z}$ et tel que $\boxed{\overline{z} = x - iy.}$

III.2 factorisation de $a^2 + b^2$

soit $z \in \mathbb{C}$, on a $z = a + ib$ avec $a \in \mathbb{R}$ et $b \in \mathbb{R}$.

$\boxed{\forall z \in \mathbb{Z}, z \times \overline{z} = (a + ib)(a - ib) = a^2 + b^2}$

III.3 inverse et quotient de deux nombres complexes

- L'inverse d'un nombre complexe non nul est aussi un nombre complexe, et $\boxed{\frac{1}{z} = \frac{\overline{z}}{z \times \overline{z}}}$
- Le quotient de deux nombres complexes est un nombre complexe et $\boxed{\frac{z}{z'} = \frac{z \times \overline{z'}}{z' \times \overline{z'}}}$

III.4 propriétés du conjugué

Pour tous nombres complexes z et z' on a :

$\boxed{\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}}$ $\boxed{\overline{-z} = -\overline{z}}$ $\boxed{\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \overline{\lambda z} = \lambda \overline{z}}$ $\boxed{\overline{z \times z'} = \overline{z} \times \overline{z'}}$

$\boxed{\overline{\left(\frac{1}{z}\right)} = \frac{1}{\overline{z}}, z \neq 0}$ $\boxed{\overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\overline{z}}{\overline{z'}}}$ $\boxed{\forall n \in \mathbb{Z}, \quad \overline{(z^n)} = \overline{z}^n}$ $\boxed{\overline{\overline{z}} = z}$

On a par ailleurs deux propriétés fondamentales :

$\boxed{z + \overline{z} = 2\Re e(z) \quad \text{et } z - \overline{z} = 2i\Im m(z)}$

III.5 réels et imaginaires purs

Soit z un nombre complexe de forme algèbrique : $z = x + iy$.

- $\boxed{z \in \mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{z} = z}$
- $\boxed{z \in i\mathbb{R} \quad \Longleftrightarrow \quad \overline{z} = -z}$

IV Résolution d'équations du second degré dans $\mathbb{C}$

Soit a, b et c trois réels avec $a \neq 0$.
On considère l'équation d'inconnue z : $\boxed{az^2 + bz + c = 0 \quad (E)}$.
En calculant $\boxed{\Delta = b^2 - 4ac}$, on a alors les résulats suivants :

- Si $\boxed{\Delta > 0}$, l'équation (E) a deux racines réelles : $\boxed{z_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}}$
- Si $\boxed{\Delta = 0}$, l'équation (E) admet une racine double : $\boxed{z_0 = -\dfrac{b}{2a}}$.
- Si $\boxed{\Delta < 0}$, l'équation (E) admet deux racines complexes conjuguées : $\boxed{z_1 = \dfrac{-b - i\sqrt{-\Delta}}{2a} \text{ et } z_2 = \dfrac{-b + i\sqrt{-\Delta}}{2a} = \overline{z_1}}$

Troisième partie
complexes et géométrie

V Représentation géométrique : Affixe d'un point

V.1 définition

affixe ponctuelle

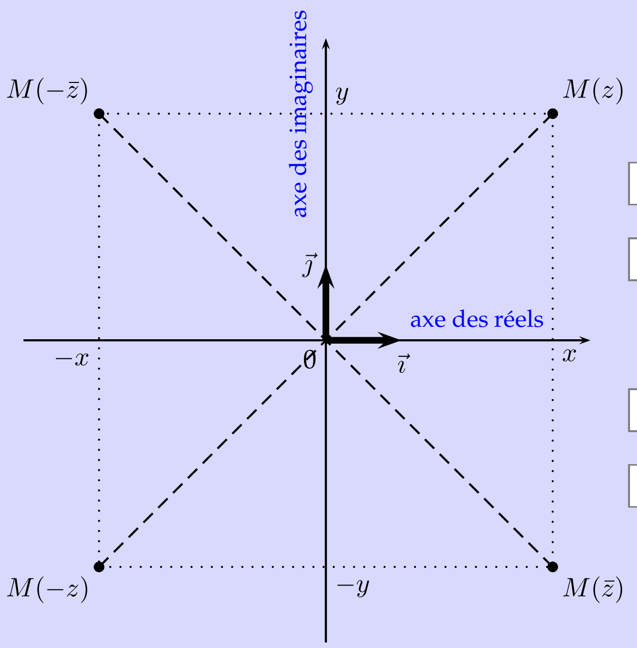
Soit $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ un repère orthonormé du plan.
L'axe des abscisses est appelé axe des réels et l'axe des ordonnées axe des imaginaires.
Ce plan repéré est alors appelé plan complexe.
Soit $M(x, y)$ dans $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ où $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$.
Le nombre complexe $z = x + iy$ est appelé affixe du point M, et l'on note $M(z)$, où la partie réelle de z est l'abscisse de M et la partie imaginaire de z est son ordonnée.
On a donc $M(x, y)$ qui signifie la même chose que $M(z)$ avec $z = x + iy$.

V.2 représentation

V.2.1 affixe d'un point

SOIT $z = x + iy$ UN ÉLÉMENT DE $\mathbb{C}$, ET $M(z)$ DÉSIGNE LE POINT D'AFFIXE z.

Représentation



le point $M(z)$ à pour coordonnées $(x; y)$

le point $M(-\bar{z})$ à pour coordonnées $(-x; y)$

le point $M(\bar{z})$ à pour coordonnées $(x; -y)$

le point $M(-z)$ à pour coordonnées $(-x; -y)$

V.2.2 affixe d'un vecteur

affixe vectorielle

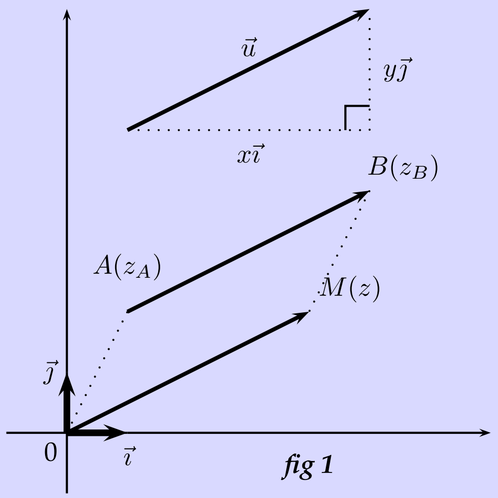


fig 1

Soit $\vec{u}$ un vecteur non nul du plan ayant pour coordonnées dans la base $(\vec{i}, \vec{j})$ le couple $(x; y)$,on a $\vec{u}(x; y)$ ou $\vec{u}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

LE NOMBRE COMPLEXE $z_{\vec{u}} = x + iy$ EST APPELÉ **AFFIXE DU VECTEUR** $\vec{u}$.Ainsi

$\boxed{\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j} \iff z_{\vec{u}} = x + iy}$.

il en découle certaines propriétés que vous démontrerez :

- $z_{\vec{u}} + z_{\vec{v}} = z_{\vec{u}+\vec{v}}$
- $\lambda z_{\vec{u}} = z_{\lambda\vec{u}}$ où $\lambda \in \mathbb{R}$
- $z_{\overrightarrow{OM}} = z_M$
- $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$

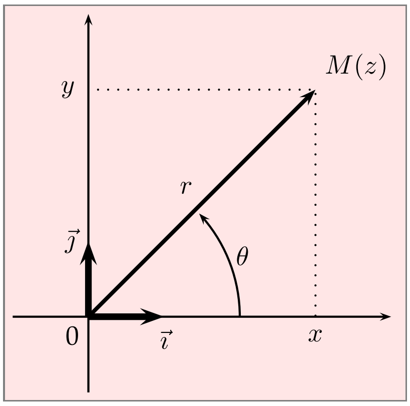
V.3 exemples

On donne $A(2 + i)$, $B(-3i)$ et $C(5 + 2i)$.

1. Déterminer l'affixe de M vérifiant : $\overrightarrow{AM} + 2\overrightarrow{BM} = \overrightarrow{AC}$;
2. Déterminer l'affixe du milieu de $[AB]$;
3. Déterminer l'affixe du point G vérifiant : $\overrightarrow{GA} + 2\overrightarrow{GB} + 3\overrightarrow{GC} = \vec{0}$

VI Forme trigonométrique

VI.1 Définition



Soit $z = x + iy$ un nombre complexe non nul,le point $M(z)$ peut être repérer à l'aide de ses coordonnées cartésiennes $M(x; y)$, mais aussi à l'aide de ses coordonnées polaires $M[r; \theta]$ où $r \geqslant 0$ est le $\boxed{\text{rayon polaire}}$ et où $\theta \in [0; 2\pi]$ est $\boxed{\text{l'angle polaire}}$.

On a par ailleurs la relation entre les coordonnées cartésiennes et polaires :

$$\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$$

avec $\boxed{r = OM = \sqrt{x^2 + y^2}}$ et $\boxed{\theta = (\vec{i}; \overrightarrow{OM})}$ à 2π près. On a donc

$$z = x + iy = r\cos\theta + ir\sin\theta = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

Forme trigonométrique

$\boxed{z = r(\cos\theta + i\sin\theta)}$ APPELÉE ***forme trigonométrique du nombre complexe** z*.
PAR AILLEURS ON NOTE $r = |z| \geq 0$
$\boxed{|z| \text{ EST APPELÉ } \textit{module du nombre complexe } z}$.
θ est appelé ***un argument de*** z et on note $\boxed{\arg z = \theta\ (2\pi)}$.

REMARQUES :
- Ainsi tout nombre complexe z non nul s'écrit $z = |z|\,(\cos\theta + i\sin\theta)$.
- $z = 0$ n'admet pas de forme trigonométrique car il n'a pas d'argument

VI.2 Forme trigonométrique et égalité

égalité

$$\forall (z, z') \in \mathbb{C}\times\mathbb{C}, \quad (z = z') \iff \Big(|z| = |z'| \quad \textbf{et} \quad \arg(z) = \arg(z')\ (2\pi)\Big)$$

VI.3 Très important

1. si $z = x + iy$ et si $M(z)$ alors : $\boxed{|z| = OM}$ il vient donc $\boxed{|z| = \sqrt{x^2+y^2}}$.
2. on rappelle ici que $z\bar{z} = x^2 + y^2$ ceci nous donne alors une autre écriture pour le module d'un complexe z : $\boxed{|z| = \sqrt{z\bar{z}}}$.
3. si $A(z_A)$ et $B(z_B)$ on a $\boxed{|z_B - z_A| = AB}$ en effet : ....
....
....
....

VI.4 Passer de la forme algébrique à la forme trigonométrique, et réciproquement

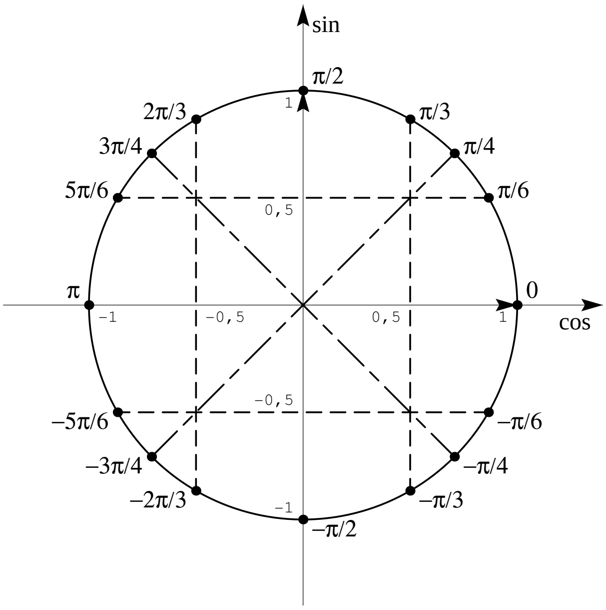
VI.4.1 Passer du Cartésien au polaire

Le problème est simple : on donne le nombre complexe $z = x + iy$, où $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, et l'on désire écrire z sous la forme : $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$.

- On commence par calculer le module $|z| = \sqrt{x^2+y^2}$
- On utilise alors les relations

$$\begin{cases} \cos\theta = \dfrac{x}{|z|} \\[2mm] \sin\theta = \dfrac{y}{|z|} \end{cases}$$

Bien entendu le cercle trigonométrique suivant à complèter par vos soins :



vous sera très utile pour donner une mesure à θ.

VI.4.2 Passer de la forme trigonométrique à la forme Cartésienne

On veut cette fois passer de $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$ à $z = x + iy$.
Il suffit ici de remplacer $\cos\theta$ et $\sin\theta$ par leurs valeurs, de développer et c'est fini.

VI.5 exercices

1. Donner la forme trigonométrique des complexes suivants, puis placer les points correspondants :

   (a) $z_1 = 1 + i$
   (b) $z_2 = 1 - i\sqrt{3}$
   (c) $z_3 = 3 - 3i$
   (d) $z_4 = \sqrt{6} - i\sqrt{2}$
   (e) $z_5 = 2i$
   (f) $z_6 = -3i$

2. Donner la forme algèbrique des complexes suivants :

   (a) $z_1 = \cos\left(\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$
   (b) $z_2 = 3\left(\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{3}\right)\right)$
   (c) $z_3 = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{-\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{-\pi}{4}\right)\right)$
   (d) $z_4 = 2\left(\cos\left(\frac{-5\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{-5\pi}{6}\right)\right)$

   puis utilisez la forme la plus adéquat pour représenter les points $M_1(z_1)$, $M_2(z_2)$, $M_3(z_3)$, et $M_4(z_4)$ dans le plan complexe.

3. Déterminer et représenter l'ensemble des points $M(z)$ tels que :

   (a) $|z - 1| = 3$
   (b) $|z - 1 + 2i| = 3$
   (c) $|z - 2 - i| = |z - 2i|$
   (d) $|iz - 2| = |3 + i - iz|$

VII propriétés du module et de l'argument

VII.1 propriétés

VII.1.1 propriétés de l'argument

propriétés de l'argument

1. $\arg(zz') = \arg(z) + \arg(z')\ [2\pi]$
2. $\arg(z^n) = n\arg(z)\ [2\pi]$
3. $\arg\left(\dfrac{1}{z}\right) = -\arg(z)\ [2\pi]$
4. $\arg\left(\dfrac{z}{z'}\right) = \arg(z) - \arg(z')\ [2\pi]$
5. $\arg(\overline{z}) = -\arg(z)\ [2\pi]$
6. $\arg(-z) = \pi + \arg(z)\ [2\pi]$

VII.1.2 propriété du module

propriétés du module

1. $|zz'| = |z| \times |z'|$
2. $|z^n| = |z|^n$
3. $\left|\dfrac{1}{z}\right| = \dfrac{1}{|z|}$
4. $\left|\dfrac{z}{z'}\right| = \dfrac{|z|}{|z'|}$
5. $|\overline{z}| = |z|$
6. $|-z| = |z|$

✂ ....

ATTENTION : on a **l'inégalité triangulaire** donnée par $\boxed{|z - z'| \leqslant |z| + |z'|}$, qui atteste que **la somme des modules n'est pas égale au module de la somme............**

VII.2 nouvelle notation

en rêvant un peu, considérons la fonction d'inconnue θ, et à valeurs complexes définie par :

$$f(\theta) = \cos(\theta) + i\sin(\theta)$$

on a alors $f'(\theta) = -\sin(\theta) + i\cos(\theta) = i\big(\cos(\theta) + i\sin(\theta)\big)$, on en déduit alors que $f'(\theta) = if(\theta)$...... donc f est alors solution de l'équation différentielle $y' = iy$ rien ne nous empêche alors de poser :

$$\boxed{e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta}$$

ainsi tout nombre complexe z s'écrit :

	$z = x + iy$	**forme algèbrique**
	$z = \lvert z\rvert(\cos\theta + i\sin\theta)$	**forme trigonométrique**
	$z = \lvert z\rvert e^{i\theta}$	**forme exponentielle**

il en découle les propriétés fondamentales suivantes :

Propriétés bis

- $e^0 = 1$
- $|e^{i\theta}| = 1$
- $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$
- $\dfrac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
- $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$
- $\left(e^{i\theta}\right)^n = e^{in\theta}$
- $\overline{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$
- $e^{2i\pi} = 1$
- $e^{i\pi} = -1$
- $e^{i\frac{\pi}{2}} = i$
- $e^{-i\frac{\pi}{2}} = -i$

➥ La formule de **MOIVRE** :

$$\boxed{(cos\theta + i\sin\theta)^n = e^{in\theta} = \cos n\theta + i\sin n\theta}$$

➥ on a par ailleurs les **FORMULES D'EULER** :

$$\boxed{\cos\theta = \frac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}} \quad \text{et} \quad \boxed{\sin\theta = \frac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}}$$

exercices

1. Placer sur le plan complexe les points dont d'affixes respectives :
   (a) $a = \sqrt{3} - i$
   (b) $b = 1 + i$
   (c) $c = 3 + 3\sqrt{3}i$
   (d) $d = 1 + 3i$

2. donner la forme trigonométrique des complexes suivants :
   (a) $z_1 = \sin\alpha + i\cos\alpha$, où $\alpha \in \mathbb{R}$
   (b) $z_2 = -2e^{i\frac{\pi}{3}}$
   (c) $z_3 = \dfrac{\cos\alpha - i\sin\alpha}{\cos\alpha + i\sin\alpha}$

3. Établir les égalités suivantes :
   (a) $(\cos(\pi/7) + i\sin(\pi/7))(\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2})(1+i) = \sqrt{2}(\cos(5\pi/84) + i\sin(5\pi/84))$,
   (b) $(1-i)(\cos(\pi/5) + i\sin(\pi/5))(\sqrt{3}-i) = 2\sqrt{2}(\cos(13\pi/60) + i\sin(13\pi/60))$,
   (c) $\dfrac{\sqrt{2}(\cos(\pi/12) + i\sin(\pi/12))}{1+i} = \dfrac{\sqrt{3}-i}{2}$.

4. Calculer le module et l'argument de $u = \dfrac{\sqrt{6}-i\sqrt{2}}{2}$ et $v = 1 - i$. En déduire le module et l'argument de $w = \dfrac{u}{v}$.

5. Calculer $\dfrac{\frac{1+i\sqrt{3}}{2}}{\frac{\sqrt{2}(1+i)}{2}}$ algébriquement, puis trigonométriquement. En déduire $\cos\dfrac{\pi}{12}$, $\sin\dfrac{\pi}{12}$, $\tan\dfrac{\pi}{12}$, $\tan\dfrac{5\pi}{12}$.

6. Déterminer le module et l'argument des nombres complexes :
$$e^{e^{i\alpha}} \quad \text{et} \quad e^{i\theta} + e^{2i\theta}.$$

7. Déterminer un polynôme P de degré 5 tel que pour tout x réel : $\cos(5x) = P(cosx)$

8. Linéariser les expressions $\cos^5(x)$ et $\sin^3(2x)\cos^2(3x)$.