exercice

1. On donne g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$g(x) = (2-x)e^x - 1$$

On admet que la fonction f tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$.

(i) Étudier les variations de g sur $[0;+\infty[$

(ii) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0;+\infty[$

(iii) Donner alors le signe de $g(x)$

2. On pose ici pour tout x de $[0;+\infty[$:

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$$

(i) Démontrer, en utilisant un résultat du cours, que pour tout x de $[0;+\infty[$, on a $e^x > x$.

(ii) Calculer pour tout x de $[0;+\infty[$, $f'(x)$

(iii) En déduire les variations de f sur $[0;+\infty[$

(iv) Donner l'équation de la tangente en 0 à la courbe représentant f

corrigé

1. On donne g la fonction définie sur $[0;+\infty[$ par :

$$g(x) = (2-x)e^x - 1$$

(i) Étudier les variations de g sur $[0;+\infty[$

> $\forall x \in [0;+\infty[$, on a $g'(x) = (1-x)e^x$ qui s'annule en 1, positive sur $[0,1[$ et négative sur $]1,+\infty[$. g est donc croissante sur $[0,1]$ et décroissante sur $[1,+\infty[$. On a par ailleurs $g(0) = 1$, $g(1) = e - 1$.

(ii) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $[0;+\infty[$

> La fonction g est continue et croissante strictement sur $[0,1]$ à valeurs dans $[1, e-1]$ qui ne contient pas 0, donc $g(x) = 0$ n'admet pas de solution sur $[0,1]$.
> La fonction g est continue et strictement décroissante sur $[1;+\infty[$ à valeurs dans $]-\infty, e-1]$ qui contient 0, dont $g(x) = 0$ admet une unique solution α dans $]1,+\infty[$, et donc aussi dans $[0,+\infty[$

(iii) Donner alors le signe de $g(x)$

> Il découle des variations de g et de la question précedente que g est positive sur $[0,\alpha[$, nulle en α et négative sur $]\alpha,+\infty[$

2. On pose ici pour tout x de $[0;+\infty[$:

$$f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x - x}$$

(i) Démontrer que pour tout x de $[0;+\infty[$, on a $e^x > x$, et justifier que f est bien définie

On pose $h(x) = e^x - x$ pour tout x de $[0;+\infty[$. On a $h'(x) = e^x - 1$ qui est positive pour tout x positif ou nul, car si $x \geqslant 0$, on a $e^x \geqslant e^0$. Donc h est croissante et $h(0) = 1$, ainsi pour tout x positif ou nul, on a $h(x) \geqslant 1 > 0$. Ce qui signifie que $e^x - x > 0$. Ainsi $e^x - x$ ne s'annule jamais, et donc f est bien définie sur $[0;+\infty[$

(ii) Calculer pour tout x de $[0;+\infty[$, $f'(x)$

On trouve $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(e^x - x)^2}$. Je ne développe volontairement pas les calculs.

(iii) En déduire les variations de f sur $[0;+\infty[$

On constate alors que le signe de $f'(x)$ est donné par le signe de $g(x)$ étudié dans les questions précédentes. Donc f est croissante sur $[0,\alpha]$ et décroissante sur $[\alpha,+\infty[$

(iv) Donner l'équation de la tangente en 0 à la courbe représentant f

$y = f'(0)(x - 0) + f(0)$, or $f'(0) = 1$ et $f(0) = 0$ donc $y = x$