exercice 1

1. On donne g définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = 2x^3 - 3x^2 - 1$.
   (a) étudier les variations de g sur $\mathbb{R}$

   La fonction g est dérivable sur $\mathbb{R}$ en tant que fonction polynôme, et $\forall x \in \mathbb{R}, g'(x) = 6x^2 - 6x$.

   On a $g'(x) = 6x(x-1)$ d'ou le tableau ci-dessous :

x	$-\infty$		0		1		α		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0		$+$		
g	$-\infty$	$\nearrow$	-1	$\searrow$	-2	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$
signe de $g(x)$				$-$			0	$+$	

   On admettra pour compléter le tableau de variations que : *la fonction g tend vers $+\infty$ lorsque x tend vers $+\infty$, et que la fonction g tend vers $-\infty$ lorsque x tend vers $-\infty$.*

   (b) Démontrer que l'équation $g(x) = 0$ admet une unique solution α sur $\mathbb{R}$

   sur $]-\infty; 1]$, la fonction g admet un maximum en 0 qui vaut -1, donc $\forall x \in \mathbb{R}$ on a $g(x) \leqslant -1 < 0$ ainsi $g(x) = 0$ n'admet pas de solution sur cet intervalle.
   sur $[1; +\infty[$, g est continue et strictement croissante, elle prend ses valeurs dans $g([1; +\infty[) = [-2; +\infty[$ qui contient 0, donc l'équation $g(x) = 0$, admet une unique solution α dans $[1; +\infty[$, et donc dans $\mathbb{R}$.

   (c) vérifier que $1,6 < \alpha < 1,7$

   on a $g(1.6) < 0$ et $g(1.7) > 0$ donc $1.6 < \alpha < 1.7$

   (d) en déduire le signe de $g(x)$

   des variations de g on en déduit son signe : cf tableau ci-dessus

2. On pose ici $f(x) = \dfrac{1-x}{1+x^3}$ pour tout $x > -1$
   (a) étudier les variations de f sur $]-1; +\infty[$.

en calculant $f'(x)$ on arrive à $f'(x) = \dfrac{g(x)}{(1+x^3)^2}$ sur $]-1;+\infty[$, or le signe de $g(x)$ est donné par celui de la fonction g sur $]-1;+\infty[$,d'après la question 1., on en déduit alors le tableau de variations de f :

x	-1		α		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$f(\alpha)$	$\nearrow$	

(b) donner une équation de la tangente (T) à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse 0, puis étudier la position relative de $\mathcal{C}_f$ et de (T).

la tangente en 0 a pour équation $y = f'(0)(x-0) + f(0)$ c'est à dire ici $y = -x+1$.
La position relative est donnée par le signe de $\Phi(x) = f(x) - (-x+1)$, soit en simplifiant son écriture $\Phi(x) = \dfrac{x^3(x-1)}{1+x^3}$.
On en déduit le tableau de signe suivant pour $\Phi(x)$ sur $]-1,+\infty[$:

x	-1		0		1		$+\infty$
$\Phi(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit que $\mathcal{C}_f$ est au dessus de (T) sur les intervalles $]-1,0[$ et sur $]1,+\infty[$, en dessous sur $]0,1[$ et les deux se coupent en 0 et en 1.

exercice 2

On considère une fonction f définie sur un intervalle I et un nombre réel a appartenant à I

1. rappeler la définition de "*f est dérivable en a*"
2. Dans chacun des cas suivants, indiquer si les deux propriétés citées peuvent être vérifiées simultanément ou non. Si la réponse est « OUI » , vous donnerez un exemple (*un graphique sera accepté*), dans le cas contraire vous vous appuirez sur vos connaissances et votre cours pour justifier la réponse
   (a) f **est continue en** a et f **est dérivable en** a
   (b) f **est continue en** a et f **n'est pas dérivable en** a
   (c) f **n'est pas continue en** a et f **est dérivable en** a
   (d) f **n'est pas continue en** a et f **n'est pas dérivable en** a

exercice 3

les questions suivantes sont indépendantes

1. On pose ici $h(x) = x^6 + 3x^2 + 2$ sur $\mathbb{R}$.
   Démontrer que l'équation $h(x) = 4$ admet au moins une solution dans $[0, 1]$.
   La fonction h est continue sur $\mathbb{R}$, en particulier sur $[0, 1]$, or $h(0) = 2$ et $h(1) = 6$, or $4 \in [h(0), h(1)]$, ainsi d'après le théorème des valeurs intermédiaires, l'équation $h(x) = 4$ admet au moins une solution dans $[0, 1]$.

2. On donne f définie sur $[3; +\infty[$ par : $f(x) = x^2\sqrt{x^2 - 9}$.
   Démontrer que $\forall x \in]3, +\infty[,\ f'(x) = \dfrac{3x(x^2 - 6)}{\sqrt{x^2 - 9}}$, puis étudier les variations de f sur $[3, +\infty[$

$$\begin{aligned}\forall x \in]3; +\infty[, \quad f'(x) &= 2x\sqrt{x^2 - 9} + x^2 \times \frac{2x}{2\sqrt{x^2 - 9}} \\ &= 2x\sqrt{x^2 - 9} + \frac{x^3}{\sqrt{x^2 - 9}} \\ &= \frac{2x(x^2 - 9) + x^3}{\sqrt{x^2 - 9}} \\ &= \frac{3x^3 - 18x}{\sqrt{x^2 - 9}} \\ &= \frac{3x(x^2 - 6)}{\sqrt{x^2 - 9}}\end{aligned}$$

   or les valeurs qui annulent le numérateur sont $-\sqrt{6}, 0$ et $\sqrt{6}$ qui n'appartiennent pas à $[3; +\infty[$. Donc $\forall x \in]3; +\infty[,\ f'(x) > 0$, et comme f est continue sur $[3; +\infty[$, on en déduit que f est strictement croissante sur $[3; +\infty[$.
   RMQ : Il a fallu préciser la continuité de f car la dérivée a priori n'existe que sur l'intervalle ouvert, donc elle est strictement croissante sur l'ouvert, mais comme elle est continue sur le fermé elle l'est aussi sur le fermé (petite subtilité ..)

3. **Un problème ouvert :**
   Soit f une fonction définie **et continue** sur $[0, 1]$ et à valeurs dans $[0, 1]$.
   Démontrer qu'il existe **au moins** un réel c de $[0, 1]$ tel que $f(c) = c$, puis interprétez graphiquement le résultat.

   indication : *considérez la fonction $g(x) = f(x) - x$ sur l'intervalle $[0, 1]$*

On a g qui est continue sur $[0, 1]$ comme somme de fonctions continues sur $[0, 1]$, par ailleurs $g(0) = f(0) \geqslant 0$ car la fonction f est à valeurs dans $[0, 1]$, et $g(1) = f(1) - 1 \leqslant 0$ pour les mêmes raisons, or $0 \in [g(1); g(0)]$, on en déduit d'après le théorème des valeurs intermédiaires que l'équation $g(x) = 0$ admet au moins une solution c dans $[0, 1]$.
Par ailleurs $g(c) = 0 \iff f(c) - c = 0 \iff f(c) = c$. donc il existe au moins un réel c dans $[0, 1]$ tel que $f(c) = c$.
Cela signifie que toute fonction continue de $[0, 1]$ dans $[0, 1]$ admet au moins un point "fixe" par f, cela signifie que sa courbe coupe tout simplement aumoins une fois la droite $"y = x"$. (*utile pour les suites.......à mediter*)