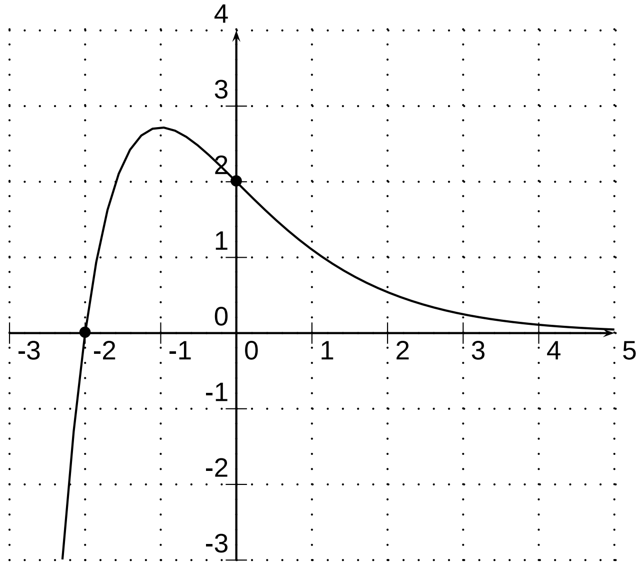
exercice 1

Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f(x) = (x^2 - 2x)e^x$
2. $f(x) = (3x + 1)e^{-3x}$
3. $f(x) = xe^{1/x}$

exercice 2



La courbe ci-contre, représente une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = (ax+b)e^{-x}$

1. En utilisant les informations données par le schéma, déterminer les réels a et b
2. Calculer $f'(x)$, dresser le tableau de variations de f et préciser la valeur du maximum de f sur $\mathbb{R}$

exercice 3

On donne la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x + 1)e^x - 3$
On admet que $\lim_{x\to-\infty} f(x) = -3$ et que $\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

1. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$
2. Démontrer que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique solution α dans $\mathbb{R}$, puis donner un encadrement de α d'amplitude 10^{-2}
3. En déduire le signe de $f(x)$ sur $\mathbb{R}$
4. Donner la position relative entre C_f et la droite d'équation $y = -3$

exercice 4

Partie A

On considère la fonction f définie et dérivable sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$ par

$$f(x) = x\mathrm{e}^{-x}.$$

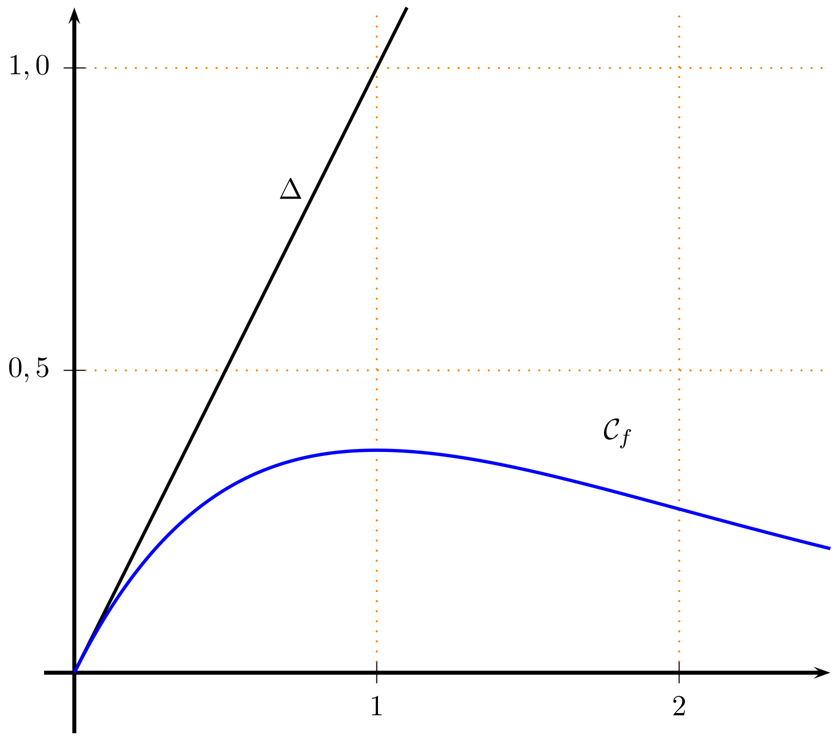
1. Déterminer la limite de la fonction f en $+\infty$.
2. Déterminer la dérivée f' de la fonction f sur $[0 ; +\infty[$ et en déduire le tableau de variations de f sur $[0 ; +\infty[$.

On donne en **annexe** la courbe $\mathcal{C}_f$ représentative de la fonction f dans un repère du plan. La droite Δ d'équation $y = x$ a aussi été tracée.

Partie B

Soit la suite (u_n) définie par $u_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = f(u_n)$.

1. Placer sur le graphique donné en **annexe**, en utilisant la courbe $\mathcal{C}_f$ et la droite Δ, les points A_0, A_1 et A_2 d'ordonnées nulles et d'abscisses respectives u_0, u_1 et u_2. Laisser les tracés explicatifs apparents.
2. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_n > 0$.
3. Montrer que la suite (u_n) est décroissante.
4. (a) Montrer que la suite (u_n) est convergente.
   (b) On admet que la limite de la suite (u_n) est solution de l'équation $x\text{e}^{-x} = x$.
   Résoudre cette équation pour déterminer la valeur de cette limite.



exercice 5

Soit u_n le nombre, exprimé en millions, de foyers possédant un téléviseur à écran plat l'année n.
On pose $n = 0$ en 2005, $u_0 = 1$ et, pour tout $n \geqslant 0$,

$$u_{n+1} = \frac{1}{10}u_n(20 - u_n).$$

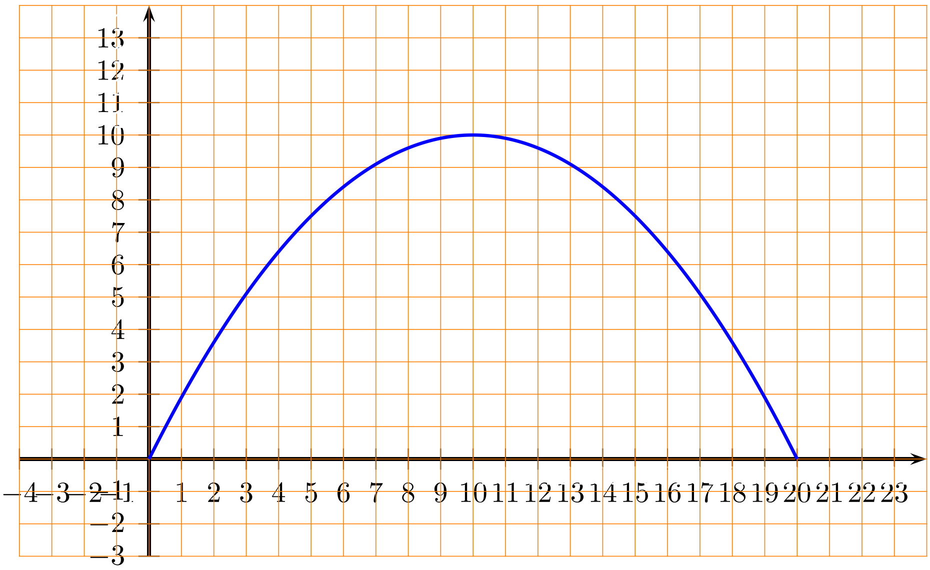
1. Soit f la fonction définie sur $[0\ ;\ 20]$ par

$$f(x) = \frac{1}{10}x(20 - x).$$

   (a) étudier les variations de f sur $[0\ ;\ 20]$.
   (b) En déduire que pour tout $x \in [0\ ;\ 20]$, $f(x) \in [0\ ;\ 10]$.

(c) On donne en **annexe** la courbe représentative $\mathcal{C}$ de la fonction f dans un repère orthonormal.
Représenter, sur l'axe des abscisses, à l'aide de ce graphique, les cinq premiers termes de la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$.

2. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N},\ 0 \leqslant u_n \leqslant u_{n+1} \leqslant 10$.
3. Montrer que la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ est convergente et déterminer sa limite.



exercice 6

On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par :

$$u_0 = 5 \quad \text{et, pour tout entier } \ n \geqslant 0,\ u_{n+1} = \left(1 + \frac{2}{n+1}\right) u_n + \frac{6}{n+1}.$$

1. (a) Calculer u_1.
   (b) Les valeurs de $u_2,\ u_3,\ u_4,\ u_5, u_6, u_7, u_8, u_9, u_{10}, u_{11}$ sont respectivement égales à :
   45, 77, 117, 165, 221, 285, 357, 437, 525, 621.
   à partir de ces données conjecturer la nature de la suite $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $d_n = u_{n+1} - u_n$.
2. On considère la suite arithmétique $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de raison 8 et de premier terme $v_0 = 16$.
   Justifier que la somme des n premiers termes de cette suite est égale à
   $4n^2 + 12n$.
3. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n on a :
   $u_n = 4n^2 + 12n + 5$.
4. Valider la conjecture émise à la question **1. b.**.