exercice 1

Le plan complexe est rapporté à un repère orthonormal direct $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$ (unité graphique : 2 cm).
On considère les points A, B et C d' affixes respectives :

$$z_A = -\frac{3}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2},\ z_B = \overline{z_A} \text{ et } z_C = -3.$$

Partie A

1. Ecrire les nombres complexes z_A et z_B sous forme exponentielle.
2. Placer les points A, B et C.
3. Démontrer que le triangle ABC est équilatéral.

Partie B

Soit f l'application qui, à tout point M du plan d'affixe z, associe le point M' d'affixe $z' = \frac{1}{3}iz^2$.
On note O′, A′, B′ et C′ les points respectivement associés par f aux points O, A, B et C.

1. Déterminer la forme exponentielle des affixes des points A′, B′ et C′.
2. Placer les points A′, B′ et C′ .
3. Démontrer l'alignement des points O, A et B′ ainsi que celui des points O, B et A′.

exercice 2

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé $\left(O, \vec{u}, \vec{v}\right)$.
Pour tout entier naturel n, on note A_n le point d'affixe z_n défini par :

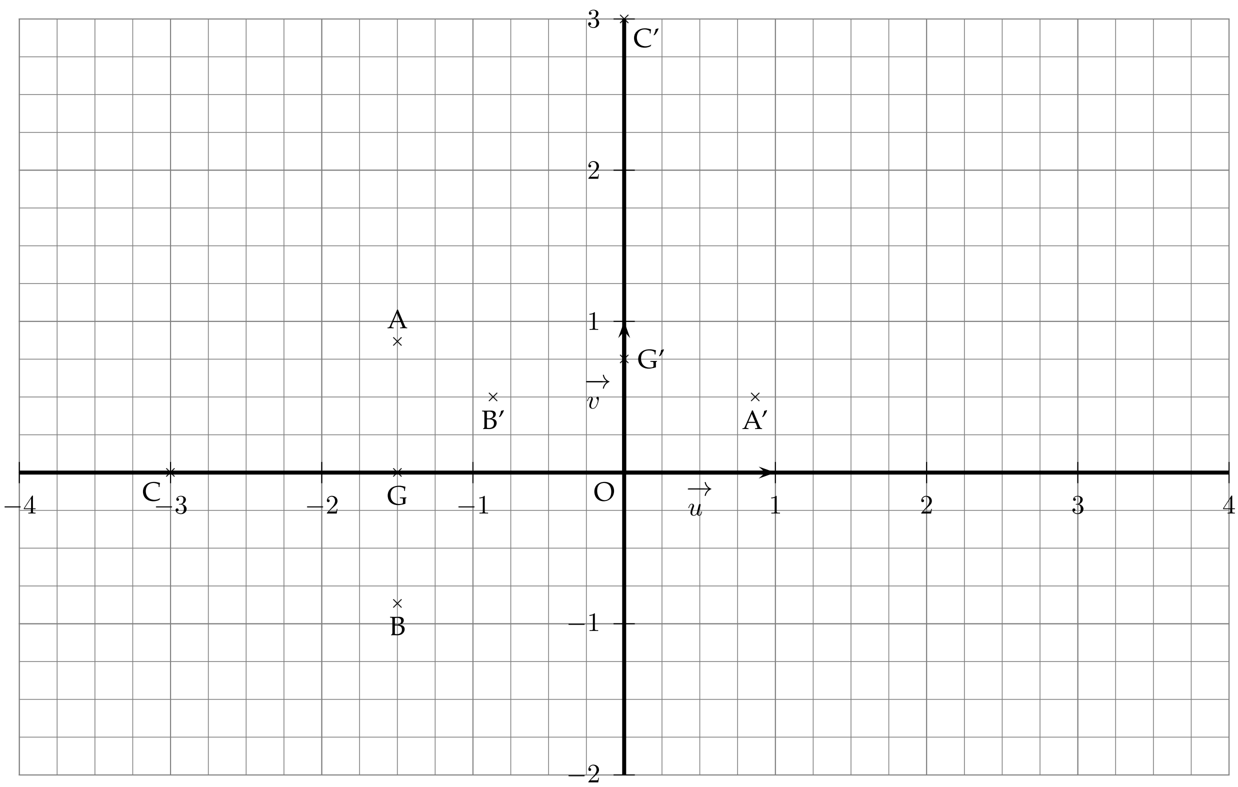
$$z_0 = 1 \quad \text{et} \quad z_{n+1} = \left(\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i\right) z_n.$$

On définit la suite (r_n) par $r_n = |z_n|$ pour tout entier naturel n.

1. Donner la forme exponentielle du nombre complexe $\frac{3}{4} + \frac{\sqrt{3}}{4}i$.
2. (a) Montrer que la suite (r_n) est géométrique de raison $\frac{\sqrt{3}}{2}$.
   (b) En déduire l'expression de r_n en fonction de n.
   (c) Que devient la distance OA_n quand n tend vers $+\infty$?
3. (a) Démontrer que le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1}.
   (b) On admet que $z_n = r_n e^{´i\frac{n\pi}{6}}$.
   Déterminer les valeurs de n pour lesquelles A_n est un point de l'axe des ordonnées.

corrigé exercice 1

1. $z_A = -\dfrac{3}{2} + i\dfrac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3} \times \left(\dfrac{-\sqrt{3}}{2} + i\,\dfrac{1}{2}\right) = \sqrt{3}\left[-\cos\left(\dfrac{\pi}{6}\right) + i\,\sin\left(\dfrac{\pi}{6}\right)\right] = \sqrt{3}\left[\cos\left(\dfrac{5\pi}{6}\right) + i\,\sin\left(\dfrac{5\pi}{6}\right)\right]$.
   On a donc $z_B = \overline{\sqrt{3}e^{i\,\frac{5\pi}{6}}} = \sqrt{3}e^{i\,\frac{-5\pi}{6}}$
   Enfin, $z_C = 3e^{i\,\pi}$
2. Voici la figure :



3. Posons $Z = \dfrac{z_C - z_B}{z_A - z_B} = \dfrac{-3 - \left(\frac{-3}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)}{\left(\frac{-3}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right) - \left(\frac{-3}{2} - i\,\frac{\sqrt{3}}{2}\right)} = \dfrac{-\frac{3}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2}}{i\,\sqrt{3}} = \dfrac{i\,\sqrt{3} \times \left(i\,\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\right)}{i\,\sqrt{3}} = \frac{1}{2} + i\,\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{i\,\frac{\pi}{3}}$.
   On a $|Z| = \left|e^{i\,\frac{\pi}{3}}\right| = 1$ et $|Z| = \dfrac{BC}{BA}$, donc BA = BC : le triangle est isocèle en B.
   De plus $\arg(Z) = \arg\left(e^{i\,\frac{\pi}{3}}\right) \equiv \dfrac{\pi}{3}(2\pi)$, donc l'angle $\left(\overrightarrow{BC}\,;\,\overrightarrow{BA}\right) \equiv \dfrac{\pi}{3}(2\pi)$: le triangle BAC, isocèle en B a $\dfrac{\pi}{3}$ pour angle principal : le triangle est donc équilatéral.

Partie B

1. On a $\dfrac{1}{3}\,i = \dfrac{1}{3}e^{i\,\frac{\pi}{2}}$, donc :
   $z_{A'} = \dfrac{1}{3}e^{i\,\frac{\pi}{2}} \times z_A^2 = \dfrac{1}{3}e^{i\,\frac{\pi}{2}} \times \left(\sqrt{3}e^{i\,\frac{5\pi}{6}}\right)^2 = \dfrac{1}{3}e^{i\,\frac{\pi}{2}} \times 3e^{i\,\frac{5\pi}{3}} = e^{i\,\frac{13\pi}{6}} = e^{i\,\frac{\pi}{6}}$
   $z_{B'} = \dfrac{1}{3}e^{i\,\frac{\pi}{2}} \times z_B^2 = \dfrac{1}{3}e^{i\,\frac{\pi}{2}} \times \left(\sqrt{3}e^{i\,\frac{-5\pi}{6}}\right)^2 = \dfrac{1}{3}e^{i\,\frac{\pi}{2}} \times 3e^{i\,\frac{-5\pi}{3}} = e^{i\,\frac{-7\pi}{6}} = e^{i\,\frac{5\pi}{6}}$
   $z_{C'} = \dfrac{1}{3}e^{i\,\frac{\pi}{2}} \times z_C^2 = \dfrac{1}{3}e^{i\,\frac{\pi}{2}} \times (-3)^2 = 3e^{i\,\frac{\pi}{2}}$

2. Voir la figure.
3. A et B′ ont le même argument, donc O, A et B′ sont alignés (O est à l'extérieur du segment [AB′]).
   B et A′ ont des arguments dont la différence est π, donc les points O, B et A′ sont alignés (O étant cette fois un point du segment [A′B])

corrigé exercice 2

1. $\left|\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}\right| = \sqrt{\left(\frac{3}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2} = \sqrt{\frac{9}{16}+\frac{3}{16}} = \sqrt{\frac{12}{16}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

   $\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i} = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\frac{3}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}+\frac{\frac{\sqrt{3}}{4}}{\frac{\sqrt{3}}{2}}\mathrm{i}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{3}{4}\times\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{i}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}\mathrm{i}\right)$

   Or $\cos\frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et $\sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

   Donc le nombre complexe $\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}$ a pour module $\frac{\sqrt{3}}{2}$ et pour argument $\frac{\pi}{6}$ donc sa forme exponentielle est $\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{\pi}{6}}$.

2. (a) $r_{n+1} = |z_{n+1}| = \left|\left(\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}\right)z_n\right| = \left|\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}\right|\times|z_n| = \frac{\sqrt{3}}{2}r_n$

   Donc la suite (r_n) est géométrique de raison $q = \frac{\sqrt{3}}{2}$ et de premier terme $r_0 = |z_0| = 1$.

   (b) La suite (r_n) est géométrique donc, pour tout n, $r_n = r_0\times q^n$, donc $r_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$.

   (c) $OA_n = |z_n| = r_n = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^n$

   (r_n) est une suite géométrique de raison $\frac{\sqrt{3}}{2}$; or $-1 < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$ donc la suite (r_n) converge vers 0.

   La longueur OA_n tend donc vers 0 quand n tend vers $+\infty$.

3. (a) On considère le triangle OA_nA_{n+1}.
   $OA_n = r_n$ donc $(OA_n)^2 = r_n^2$
   $OA_{n+1} = r_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{2}r_n$ donc $(OA_{n+1})^2 = \frac{3}{4}r_n^2$
   $A_nA_{n+1} = |z_{n+1}-z_n| = \left|\left(\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}\right)z_n - z_n\right| = \left|\left(\frac{3}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}-1\right)z_n\right| = \left|-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{i}\right|\times|z_n|$
   $= \sqrt{\left(-\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{4}\right)^2}\times r_n = \sqrt{\frac{1}{16}+\frac{3}{16}}r_n = \sqrt{\frac{4}{16}}r_n = \frac{1}{2}r_n$ donc $(A_nA_{n+1})^2 = \frac{1}{4}r_n^2$
   $(A_nA_{n+1})^2+(OA_{n+1})^2 = \frac{1}{4}r_n^2+\frac{3}{4}r_n^2 = r_n^2 = (OA_n)^2$
   D'après la réciproque du théorème de Pythagore, le triangle OA_nA_{n+1} est rectangle en A_{n+1}.

   (b) On admet que $z_n = r_n\mathrm{e}^{\mathrm{i}\,\frac{n\pi}{6}}$.
   Le point A_n, d'affixe z_n, appartient à l'axe des ordonnées si et seulement si son argument est $\frac{\pi}{2}$ ou $\frac{3\pi}{2}$ modulo 2π, c'est-à -dire $\frac{\pi}{2}$ modulo π, donc il peut s'écrire $\frac{\pi}{2}+k\pi$ où $k\in\mathbb{Z}$.
   Le nombre z_n a pour argument $\frac{n\pi}{6}$; $\frac{n\pi}{6} = \frac{\pi}{2}+k\pi \iff n = 3+6k$.
   Mais n est un entier naturel donc k doit être strictement positif donc appartenir à $\mathbb{N}$.
   Donc si n s'écrit $3+6k$ avec $k\in\mathbb{N}$, alors le point A_n appartient à l'axe des ordonnées.