exercice 1

Dans un pays de population constante égale à 120 millions, les habitants vivent soit en zone rurale, soit en ville. Les mouvements de population peuvent être modélisés de la façon suivante :

- en 2010, la population compte 90 millions de ruraux et 30 millions de citadins ;
- chaque année, $10\,\%$ des ruraux émigrent à la ville ;
- chaque année, $5\,\%$ des citadins émigrent en zone rurale.

Pour tout entier naturel n, on note :

- u_n la population en zone rurale, en l'année $2010 + n$, exprimée en millions d'habitants ;
- v_n la population en ville, en l'année $2010 + n$, exprimée en millions d'habitants.

On a donc $u_0 = 90$ et $v_0 = 30$.

Partie A

1. Traduire le fait que la population totale est constante par une relation liant u_n et v_n.
2. On utilise un tableur pour visualiser l'évolution des suites (u_n) et (v_n).
   Quelles formules peut-on saisir dans les cellules B3 et C3 qui, recopiées vers le bas, permettent d'obtenir la feuille de calcul ci-dessous :

	A	B	C
1	n	Population en zone rurale	Population en ville
2	0	90	30
3	1	82,5	37,5
4	2	76,125	43,875
5	3	70,706	49,294
6	4	66,100	53,900
7	5	62,185	57.815
8	6	58,857	61,143
9	7	56,029	63,971
10	8	53,625	66,375
11	9	51,581	68,419
12	10	49,844	70,156
13	11	48,367	71,633
14	12	47,112	72,888
15	13	46,045	73,955
16	14	45,138	74,862
17	15	44,368	75,632
18	16	43,713	76,287
19	17	43,156	76,844
20	18	42,682	77,318
21	19	42,280	77,720
22	20	41,938	78,062
	…	…	…
59	57	40,005	79,995
60	58	40,004	79,996
61	59	40,003	79,997
62	60	40,003	79,997
63	61	40,002	79,998

3. Quelles conjectures peut-on faire concernant l'évolution à long terme de cette population ?

Partie B

On admet dans cette partie que, pour tout entier naturel n, $\quad u_{n+1} = 0,85u_n + 6$.

1. (i) Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est décroissante.

   (ii) On admet que u_n est positif pour tout entier naturel n.
   Que peut-on en déduire quant à la suite (u_n) ?

2. On considère la suite (w_n), définie par : $w_n = u_n - 40$, pour tout $n \geqslant 0$.
   (i) Démontrer que (w_n) est une suite géométrique de raison $0,85$.
   (ii) En déduire l'expression de w_n puis de u_n en fonction de n.
   (iii) Déterminer l'expression de v_n en fonction de n.
3. Valider ou invalider les conjectures effectuées à la question **3.** de la **partie A**.
4. On considère l'algorithme suivant :

Entrée :	n et u sont des nombres
Initialisation :	n prend la valeur 0
	u prend la valeur 90
Traitement :	Tant que $u \geqslant 120 - u$ faire
	n prend la valeur $n+1$
	u prend la valeur $0,85 \times u + 6$
	Fin Tant que
Sortie :	Afficher n

   (i) Que fait cet algorithme ?
   (ii) Quelle valeur affiche-t-il ?

exercice 2

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul par

$$\begin{cases} u_1 & = \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} & = \dfrac{n+1}{2n} u_n \end{cases}$$

1. Calculer u_2, u_3 et u_4.
2. (i) Démontrer que, pour tout entier naturel n non nul, u_n est strictement positif.
   (ii) Démontrer que la suite (u_n) est décroissante.
   (iii) Que peut-on en déduire pour la suite (u_n) ?
3. Pour tout entier naturel n non nul, on pose

$$v_n = \frac{u_n}{n}.$$

   (i) Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. On précisera sa raison et son premier terme v_1.
   (ii) En déduire que, pour tout entier naturel n non nul,

$$u_n = \frac{n}{2^n}.$$

4. On admet que pour tout entier naturel $n \geqslant 4$, on a $2^n \geqslant n^2$.
   Démontrer que la suite (u_n) converge vers 0.