# corrigé exo 1

## Partie A

1. La population totale est constante et égale à 120 millions donc, pour tout entier naturel $n$, on peut dire que $u_n + v_n = 120$.
2. On utilise un tableur pour visualiser l'évolution des suites $(u_n)$ et $(v_n)$.
   Dans B3 on entre la formule `=0,9*B2+0,05*C2`.
   Dans C3 on entre la formule `=0,1*B2+0,95*C2`.
3. D'après les données du tableur, la suite $(u_n)$ (donc le nombre de ruraux) semble décroitre et tendre vers 40 millions, et la suite $(v_n)$ (donc le nombre de citadins) semble croitre et tendre vers 80 millions.

## Partie B

On admet dans cette partie que, pour tout entier naturel $n$, $u_{n+1} = 0,85u_n + 6$.

1. (i) Soit $\mathcal{P}_n$ la propriété $u_n > u_{n+1}$.
   - $u_0 = 90$ et $u_1 = 0,85u_0 = 0,85 \times 90 + 6 = 82,5$ donc $u_0 > u_1$
     La propriété est vraie au rang 0.
   - On suppose la propriété vraie au rang $p \geqslant 0$, c'est-à -dire $u_p > u_{p+1}$.
     $u_p > u_{p+1} \iff 0,85u_p > 0,85u_{p+1} \iff 0,85u_p + 6 > 0,85u_{p+1} + 6 \iff u_{p+1} > u_{p+2}$
     Donc la propriété est vraie au rang $p + 1$ ; elle est héréditaire.
   - $\mathcal{P}_n$ est vraie au rang 0 et est héréditaire, donc elle est vraie pour tout entier naturel $n$.

   Pour tout $n$, $u_n > u_{n+1}$ donc la suite $(u_n)$ est décroissante.

   (ii) On admet que $u_n$ est positif pour tout entier naturel $n$, donc la suite $(u_n)$ est minorée par 0.
   On a vu que la suite était décroissante.
   Donc, d'après le théorème de la convergence monotone, la suite $(u_n)$ est convergente.
2. On considère la suite $(w_n)$, définie par : $w_n = u_n - 40$, pour tout $n \geqslant 0$, donc $u_n = w_n + 40$.

   (i)
   - $w_{n+1} = u_{n+1} - 40$
     $w_{n+1} = 0,85u_n + 6 - 40$
     $w_{n+1} = 0,85(w_n + 40) - 34$
     $w_{n+1} = 0,85w_n + 34 - 34 = 0,85w_n$
   - $w_0 = u_0 - 40 = 90 - 40 = 50$

   Donc la suite $(w_n)$ est géométrique de raison $q = 0,85$ et de premier terme $w_0 = 50$.

   (ii) D'après les propriétés des suites géométriques, pour tout $n$ : $w_n = w_0 \times q^n = 50 \times 0,85^n$
   Comme pour tout $n$, $u_n = w_n + 40$, on peut dire que $u_n = 50 \times 0,85^n + 40$

   (iii) Pour tout $n$, $\left.\begin{array}{l} u_n + v_n = 120 \\ u_n = 50 \times 0,85^n + 40 \end{array}\right\} \Longrightarrow v_n = 80 - 50 \times 0,85^n$
3. 
   - Pour tout $n$, $w_n = 50 \times 0,85^n$ donc $w_n > 0$
     $w_{n+1} = 0,85w_n < w_n$ et donc la suite $(w_n)$ est décroissante.
     Comme pour tout $n$, $u_n = w_n + 40$, la suite $(u_n)$ est décroissante.
   - $(w_n)$ est géométrique de raison $0,85$ ; or $-1 < 0,85 < 1$ donc la suite $(w_n)$ converge vers 0. Comme pour tout $n$, $u_n = w_n + 40$, la suite $(u_n)$ converge vers 40.
   - Pour tout $n$, $v_n = 120 - u_n$ et la suite $(u_n)$ est décroissante, donc la suite $(v_n)$ est croissante.
   - La suite $(u_n)$ est convergente vers 40 et, pour tout $n$, $v_n = 120 - u_n$, donc la suite $(v_n)$ est convergente vers $120 - 40 = 80$.
4. On considère l'algorithme suivant :

| | |
|---|---|
| Entrée : | $n$ et $u$ sont des nombres |
| Initialisation : | $n$ prend la valeur $0$ |
| | $u$ prend la valeur $90$ |
| Traitement : | Tant que $u \geqslant 120 - u$ faire |
| | $n$ prend la valeur $n + 1$ |
| | $u$ prend la valeur $0,85 \times u + 6$ |
| | Fin Tant que |
| Sortie : | Afficher $n$ |

(i) Dans cet algorithme, la variable $u$, initialisée à 90, représente le terme $u_n$, et $120 - u$ représente donc $v_n$.
On sort de la boucle « tant que » dès que $u < 120 - u$ c'est-à -dire dès que $u_n < v_n$ ; l'algorithme affiche donc la plus petite valeur $n$ pour laquelle $u_n < v_n$.
C'est la plus petite valeur de $n$ pour laquelle le nombre de ruraux est devenu inférieur au nombre de citadins.

(ii) D'après le tableur, $u_5 > v_5$ et $u_6 < v_6$ donc la valeur affichée sera 6.

## corrigé exo 2

1. – $u_2 = \dfrac{1+1}{2\times 1}u_1 = \dfrac{1}{2}$
   – $u_3 = \dfrac{2+1}{2\times 2}u_2 = \dfrac{3}{4} \times \dfrac{1}{2} = \dfrac{3}{8}$
   – $u_4 = \dfrac{3+1}{2\times 3}u_3 = \dfrac{4}{6} \times \dfrac{3}{8} = \dfrac{1}{4}$
2. (i) Montrons par récurrence que, pour tout entier naturel $n$ non nul, $u_n > 0$.
   – **Initialisation.** $u_1 = \dfrac{1}{2} > 0$, la propriété est vraie au rang 1.
   – **Hérédité.** Supposons que, pour un certain entier naturel $k$ non nul on a $u_k > 0$, alors, comme $\dfrac{k+1}{2k} > 0$, on a $\dfrac{k+1}{2k}u_k > 0$, c'est-à -dire $u_{k+1} > 0$, et la propriété est donc héréditaire.
   – **Conclusion.** Pour tout entier naturel $n$ non nul : $u_n > 0$.

   (ii) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors $\dfrac{u_{n+1}}{u_n} = \dfrac{n+1}{2n} = \dfrac{n+1}{n+n} \leqslant 1$. Comme $u_n > 0$ on en déduit que $u_{n+1} \leqslant u_n$ et donc que la suite $(u_n)$ est décroissante.

   (iii) La suite $(u_n)$ est décroissante, minorée (par 0), elle est donc convergente vers une limite $\ell \geqslant 0$.
3. (i) Soit $n \in \mathbb{N}^*$, alors : $v_{n+1} = \dfrac{u_{n+1}}{n+1} = \dfrac{\frac{n+1}{2n}u_n}{n+1} = \dfrac{1}{2} \times \dfrac{1}{n}u_n = \dfrac{1}{2}v_n$. La suite $(v_n)$ est donc une suite géométrique de raison $\dfrac{1}{2}$ et de premier terme $v_1 = u_1 = \dfrac{1}{2}$.

   (ii) Par propriété des suites géométriques, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ :
   $v_n = \left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1} v_1 = \dfrac{1}{2^n}$, on en déduit, comme $v_n = \dfrac{u_n}{n}$, que $u_n = \dfrac{n}{2^n}$.
4. On a pour tout entier $n \geqslant 4$, $0 < \dfrac{1}{2^n} \leqslant \dfrac{1}{n^2}$, donc $0 < u_n \leqslant \dfrac{1}{n}$ en multipliant par $n$. Or $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$, d'après le théorème des gendarmes on a donc $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 0$