## exercice 1

Soit $f$ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$f(x) = \frac{3}{1+\mathrm{e}^{-2x}}.$$

1. Démontrer que la fonction $f$ est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
2. résoudre $f(x) = 2.999$

## exercice 2

Soit $f$ la fonction dérivable, définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \mathrm{e}^x + \frac{1}{x}.$$

1. **étude d'une fonction auxiliaire**
   (i) Soit la fonction $g$ dérivable, définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

   $$g(x) = x^2\mathrm{e}^x - 1.$$

   Étudier le sens de variation de la fonction $g$.
   *On admet que $g(x)$ tend vers $+\infty$ lorsque $x$ tend vers $+\infty$*

   (ii) Démontrer qu'il existe un unique réel $a$ appartenant à $[0\ ;\ +\infty[$ tel que $g(a) = 0$.
   Démontrer que $a$ appartient à l'intervalle [0,703 ; 0,704[.

   (iii) Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[0\ ;\ +\infty[$.
2. **étude de la fonction *f***
   (i) On note $f'$ la fonction dérivée de $f$ sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   Démontrer que pour tout réel strictement positif $x$, $f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^2}$.

   (ii) En déduire le sens de variation de la fonction $f$ et dresser son tableau de variation sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.

   (iii) Démontrer que la fonction $f$ admet pour minimum le nombre réel
   $m = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a}$.

   (iv) Justifier que $3,43 < m < 3,45$.

## exercice 3

Soit $n$ un entier naturel non nul.
On pose pour tout $x \geqslant 0$ :

$$f_n(x) = \frac{e^{-nx}}{1+x}$$

1. Étudier les variations de la fonction $f_1$ sur $[0;+\infty[$
2. (i) Démontrer que pour tout entier naturel non nul $n$, les courbes représentant les fonctions $f_n$ passent par un même point, dont on donnera les coordonnées

   (ii) Calculer, en fonction de $n$, la dérivée de $f_n$

   (iii) en déduire les variations de $f_n$ sur $[0;+\infty[$

   (iv) Donner l'équation de la tangente en $0$ à la courbe représentant $f_n$