exercice 1

On considère le polynôme P défini sur $\mathbb{C}$ par

$$P(z)=z^3-\left(2+\mathrm{i}\sqrt{2}\right)z^2+2\left(1+\mathrm{i}\sqrt{2}\right)z-2\mathrm{i}\sqrt{2}.$$

1. Montrer que le nombre complexe $z_0=\mathrm{i}\sqrt{2}$ est solution de l'équation $P(z)=0$.
2. (a) Déterminer les réels a et b tels que $P(z)=\left(z-\mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(z^2+az+b\right)$.

   (b) En déduire les solutions dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z)=0$.

corrigé

1. $P\left(\mathrm{i}\sqrt{2}\right)=\left(\mathrm{i}\sqrt{2}\right)^3-\left(2+\mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(\mathrm{i}\sqrt{2}\right)^2+2\left(1+\mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(\mathrm{i}\sqrt{2}\right)-2\mathrm{i}\sqrt{2}=$
$-2\mathrm{i}\sqrt{2}+4+2\mathrm{i}\sqrt{2}+2\mathrm{i}\sqrt{2}-4-2\mathrm{i}\sqrt{2}=0 \iff \mathrm{i}\sqrt{2}$ est solution dans $\mathbb{C}$ de l'équation $P(z)=0$.
2. (a) Développons : $\left(z-\mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(z^2+az+b\right)=z^3+az^2+bz-z^2\mathrm{i}\sqrt{2}-az\mathrm{i}\sqrt{2}-b\mathrm{i}\sqrt{2}=z^3+\left(a-\mathrm{i}\sqrt{2}\right)z^2+\left(b-a\mathrm{i}\sqrt{2}\right)z-b\mathrm{i}\sqrt{2}$.

   Par identification avec l'énoncé, on obtient :

   $$\left\{\begin{array}{lcl} a-\mathrm{i}\sqrt{2} & = & -2-\mathrm{i}\sqrt{2}\\ b-a\mathrm{i}\sqrt{2} & = & 2+2\mathrm{i}\sqrt{2}\\ -b\mathrm{i}\sqrt{2} & = & -2\mathrm{i}\sqrt{2}\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} a & = & -2\\ b+2\mathrm{i}\sqrt{2} & = & 2+2\mathrm{i}\sqrt{2}\\ -b & = & -2\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} a & = & -2\\ b & = & 2\\ b & = & 2\end{array}\right.$$

   On a donc $P(z)=\left(z-\mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(z^2-2z+2\right)$

   (b) En utilisant la factorisation précédente :

   $$P(z)=0 \iff \left(z-\mathrm{i}\sqrt{2}\right)\left(z^2-2z+2\right) \iff \left\{\begin{array}{lcl} z-\mathrm{i}\sqrt{2} & = & 0\\ z^2-2z+2 & = & 0\end{array}\right.$$

   On retrouve la racine $\mathrm{i}\sqrt{2}$; résolution de l'équation du second degré :
   $z^2-2z+2=0 \iff (z-1)^2-1+2=0 \iff (z-1)^2+1=0 \iff$
   $(z-1)^2=-1 \iff (z-1)^2=\mathrm{i}^2 \iff \left\{\begin{array}{lcl} z-1 & = & \mathrm{i}\\ z-1 & = & -\mathrm{i}\end{array}\right. \iff \left\{\begin{array}{lcl} z & = & 1+\mathrm{i}\\ z & = & 1-\mathrm{i}\end{array}\right.$

   Les solutions sont donc : $\mathrm{i}\sqrt{2}$, $1+\mathrm{i}$, $1-\mathrm{i}$.

exercice 2

Les questions sont indépendantes

1. Résoudre dans $\mathbb{C}\setminus\{-i\}$, l'équation : $\dfrac{z+3-2i}{z+i}=1-i$

   $z+3-2i=(1-i)(z+i)$ avec $z\neq -i$, ce qui conduit à $iz=3i-2$ c'est à dire $z=\dfrac{3i-2}{i}=3-\dfrac{2}{i}=3+2i$
2. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $z^4+3z^2+2=0$

   En posant $Z=z^2$ on trouve $Z=-1$ et $Z=-2$. donc $z^2=-1$ ou $z^2=-2$, c'est à dire (sans calculer le discriminant qui est un peu lourd) que $\iff z^2=(i\sqrt{2})^2$ ou $z^2=(i)^2$. En passant tout dans le premier membre on arrive donc à : $(z-i\sqrt{2})(z+i\sqrt{2})=0$ ou $(z-i)(z+i)=0$
   donc : $S=\left\{i\sqrt{2},-i\sqrt{2},i,-i\right\}$
3. Résoudre dans $\mathbb{C}$ l'équation $(1+i)\overline{z}=(7-5i)z+3-i$

4. soient z et z' deux nombres complexse non nul vérifiant l'égalité $z\overline{z} = 1 = z'\overline{z'}$.
   Montrer que $\dfrac{z+z'}{1+zz'}$ est réel.

   Remarquons tout d'abord cher public de TS2, que $z\overline{z} = 1$ signifie que $\overline{z} = \dfrac{1}{z}$.
   On a $\overline{\left(\dfrac{z+z'}{1+zz'}\right)} = \dfrac{\overline{z}+\overline{z'}}{1+\overline{z}\overline{z'}} = \dfrac{\dfrac{1}{z}+\dfrac{1}{z'}}{1+\dfrac{1}{zz'}}$
   Donc en réduisant au même dénominateur on arrive à $\overline{\dfrac{z+z'}{1+zz'}} = \dfrac{z+z'}{1+zz'}$, ce qui prouve qu'il est réel

exercice 3

On pose pour tout z dans $\mathbb{C}$:

$$P(z) = 2z^3 + (1+6i)z^2 + (1+3i)z + 3i$$

1. Démontrer que P admet une racine imaginaire pure αi, où $\alpha \in \mathbb{R}$.

   P admet une racine imaginaire pure $\alpha i \iff P(\alpha i) = 0$.
   $P(\alpha i) = 0 \iff 2(\alpha i)^3 + (1+6i)(\alpha i)^2 + (1+3i)(\alpha i) + 3i = 0$.
   On en déduit que $P(\alpha i) = 0 \iff (-\alpha^2 - 3\alpha) + i(-2\alpha^3 - 6\alpha^2 + \alpha + 3) = 0$, c'est à dire $-\alpha^2 - 3\alpha = 0$ et $-2\alpha^3 - 6\alpha^2 + \alpha + 3 = 0$.La première équation donne $\alpha = 0$ ou $\alpha = -3$, or seule la valeur $\alpha = -3$ ne valide la deuxième équation. On en conclut que la seule racine imaginaire pure de P est $-3i$.Le polynome P est donc factorisable par $z + 3i$.

2. En déduire les réels a, b et c tels que $\forall z \in \mathbb{C}, P(z) = (z+3i)(az^2+bz+c)$

   En développant on a :$az^3 + (b+3ia)z^2 + (c+3ib)z + 3ic = 2z^3 + (1+6i)z^2 + (1+3i)z + 3i$, soit en identifiant les coefficients et en résolvant le système obtenu : $a = 2$, $b = 1$ et $c = 1$

   Pour la suite on prendra $a = 2$, $b = 1$ et $c = 1$

3. Résoudre $P(z) = 0$

   $P(z) = 0 \iff (z+3i)(2z^2+z+1) = 0$. on en déduit les solutions après avoir déterminer les racines du trinôme de $\Delta = -7 = (i\sqrt{7})^2$ on a $S = \left\{-3i; \dfrac{-1-i\sqrt{7}}{4}; \dfrac{-1+i\sqrt{7}}{4}\right\}$

exercice 4

Pour tout point M d'affixe z différent de $1-2i$, on associe son image M' d'affixe

$$z' = \frac{iz+3-i}{z-1+2i}$$

On pose par ailleurs $z' = x' + iy'$ et $z = x + iy$, où x', y', x et y sont 4 réels .

1. Calculer l'affixe de A', point image du point A lorsque $z_A = 2i + 1$

   On remplace z par z_A et on a $z'_A = \dfrac{i(2i+1)+3-i}{2i+1-1+2i} = \dfrac{1}{4i} = -\dfrac{1}{4}i$

2. Calculer l'affixe du point B dont l'image est le point B' d'affixe $z_{B'} = 2$

   On cherche z_B tel que $2 = \dfrac{iz_B+3-i}{z_B-1+2i}$ cette fois-ci. Ce qui donne :
   $2(z_B - 1 + 2i) = iz_B + 3 - i \Leftrightarrow (2-i)z_B = 5 - 5i \Leftrightarrow z_B = \dfrac{5-5i}{2-i} = \dfrac{(5-5i)(2+i)}{5} = 3 - i$

3. Exprimer x' et y' en fonction de x et de y .

   Pour tout $z \neq 1-2i$, c'est à dire pour tout $(x,y) \neq (1,-2)$ on a :

$$\begin{aligned} X+iY &= \frac{i(x+iy)+3-i}{x+iy-1+2i} \\ &= \frac{(3-y)+i(x-1)}{(x-1)+i(y+2)} \\ &= \frac{\big((3-y)+i(x-1)\big)\times\big((x-1)-i(y+2)\big)}{(x-1)^2+(y+2)^2} \\ &= \frac{(3-y)(x-1)+(x-1)(y+2)}{(x-1)^2+(y+2)^2}+i\frac{(x-1)^2-(y+2)(3-y)}{(x-1)^2+(y+2)^2} \\ &= \frac{5x-5}{(x-1)^2+(y+2)^2}+i\frac{(x-1)^2+y^2-y-6}{(x-1)^2+(y+2)^2} \end{aligned}$$

   On en déduit bien évidemment en égalant les parties réelles et imaginaires la caleur de X et de Y en fonction de x et de y.

4. Déterminer et représenter, l'ensemble des points $M(z)$, tels que z' soit réel.