BACCALAURÉAT BLANC

Session 2016

MATHÉMATIQUES

Série S

Enseignement obligatoire

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées conformément à la loi en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 5 pages numérotées de 1 à 5.

exercice 1 : 4 pts

Le chikungunya est une maladie virale transmise d'un être humain à l'autre par les piqûres de moustiques femelles infectées.

Un test a été mis au point pour le dépistage de ce virus. Le laboratoire fabriquant ce test fournit les caractéristiques suivantes :

- la probabilité qu'une personne atteinte par le virus ait un test positif est de $0,98$;
- la probabilité qu'une personne non atteinte par le virus ait un test positif est de $0,01$.

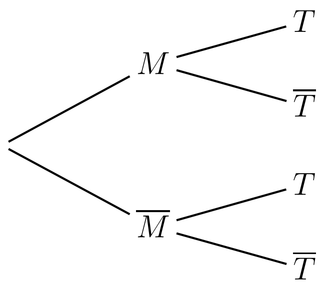
On procède à un test de dépistage systématique dans une population « cible ». Un individu est choisi au hasard dans cette population. On appelle :

- M l'évènement : « L'individu choisi est atteint du chikungunya »
- T l'évènement : « Le test de l'individu choisi est positif »

On notera $\overline{M}$ (respectivement $\overline{T}$) l'évènement contraire de l'évènement M (respectivement T).

On note $p\,(0 \leqslant p \leqslant 1)$ la proportion de personnes atteintes par la maladie dans la population cible.

1. (a) Recopier et compléter l'arbre de probabilité ci-dessous.



   (b) Exprimer $P(M \cap T)$, $P\left(\overline{M} \cap T\right)$ puis $P(T)$ en fonction de p.

2. (a) Démontrer que la probabilité de M sachant T est donnée par la fonction f définie sur [0 ; 1] par :

$$f(p) = \frac{98p}{97p+1}.$$

   (b) étudier les variations de la fonction f sur [0 ; 1].

3. On considère que le test est fiable lorsque la probabilité qu'une personne ayant un test positif soit réellement atteinte du chikungunya est supérieure à $0,95$.
   En utilisant les résultats de la question **2.**, à partir de quelle proportion p de malades dans la population le test est-il fiable ?

exercice 2 : 5 pts

Le plan est muni du repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O}, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\right)$.

On donne le nombre complexe $\mathrm{j} = -\frac{1}{2} + \mathrm{i}\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Le but de cet exercice est d'étudier quelques propriétés du nombre j et de mettre en évidence un lien de ce nombre avec les triangles équilatéraux.

Partie A : propriétés du nombre j

1. (a) Résoudre dans l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes l'équation

$$z^2 + z + 1 = 0.$$

   (b) Vérifier que le nombre complexe j est une solution de cette équation.
2. Déterminer le module et un argument du nombre complexe j, puis donner sa forme exponentielle.
3. Démontrer les égalités suivantes :
   (a) $\mathrm{j}^3 = 1$;
   (b) $\mathrm{j}^2 = -1 - \mathrm{j}$.
4. On note P, Q, R les images respectives des nombres complexes 1, j et j^2 dans le plan. Quelle est la nature du triangle PQR ? Justifier la réponse.

Partie B

Soit a, b, c trois nombres complexes vérifiant l'égalité $a + \mathrm{j}b + \mathrm{j}^2c = 0$.
On note A, B, C les images respectives des nombres a, b, c dans le plan.

1. En utilisant la question A - 3. b., démontrer l'égalité : $a - c = \mathrm{j}(c - b)$.
2. En déduire que AC = BC .
3. Démontrer l'égalité : $a - b = \mathrm{j}^2(b - c)$.
4. En déduire que le triangle ABC est équilatéral.

exercice 3 : 5 pts

On considère la suite numérique (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = a, \text{ et, pour tout entier } n,\ u_{n+1} = u_n\,(2 - u_n)$$

où a est un réel donné tel que $0 < a < 1$.

1. On suppose dans cette question que $a = \dfrac{1}{8}$
   (a) Calculer u_1 et u_2.
   (b) Sur l'annexe, sont représentées la droite (d) d'équation $y = x$ et la courbe (Γ) représentative de la fonction : $f\ : x \mapsto x(2 - x)$.
   Utiliser (d) et (Γ) pour construire sur l'axe des abscisses les points A_1, A_2, A_3 d'abscisses respectives $u_1,\ u_2,\ u_3$.
   Vous découperez l'annexe et la collerez sur votre copie
2. On suppose dans cette question que a est un réel quelconque de l'intervalle]0 ; 1[.
   (a) Montrer par récurrence que, pour tout entier $n,\ 0 < u_n < 1$.
   (b) Étudier les variations la suite (u_n) .
   (c) Que peut-on en déduire ?

3. On suppose à nouveau dans cette question que $a = \dfrac{1}{8}$. On considère la suite numérique (v_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$v_n = 1 - u_n.$$

   (a) Exprimer, pour tout entier $n,\ v_{n+1}$ en fonction de v_n.

   (b) Démontrer que pour tout entier naturel n, on a : $v_n = \left(\dfrac{7}{8}\right)^{2^n}$

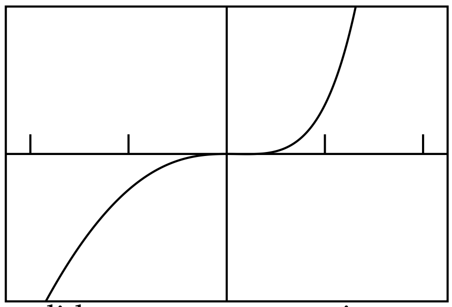
   (c) Déterminer la limite de la suite (v_n), puis celle de la suite (u_n).

exercice 4 : 6 pts

On considère la fonction numérique f définie sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = x^2\mathrm{e}^{x-1} - \frac{x^2}{2}.$$

Le graphique ci-dessous est la courbe représentative de cette fonction telle que l'affiche une calculatrice dans un repère orthonormal.



Conjectures
à l'observation de cette courbe, quelles conjectures pensez-vous pouvoir faire concernant
a. le sens de variations de f sur $[-3\,;\ 2]$?
b. la position de la courbe par rapport à l'axe des abscisses ?

Dans la suite de ce problème , on se propose de valider ou non ces conjectures et de les compléter.

Partie A : contrôle de la première conjecture

1. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x, et vérifier que $f'(x) = xg(x)$, avec g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = (x+2)\mathrm{e}^{x-1} - 1$.

2. Etude du signe de $g(x)$ pour x réel.
   (a) Calculer $g'(x)$ et étudier son signe suivant les valeurs de x.
   (b) En déduire le sens de variations de la fonction g, puis dresser son tableau de variations.
   (*On admettra que* $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -1$ *et que* $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$)
   (c) Montrer que l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution dans $\mathbb{R}$. On note α cette solution. Montrer que $0,20 < \alpha < 0,21$.
   (d) Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.
3. Sens de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
   (a) Etudier, suivant les valeurs de x, le signe de $f'(x)$.
   (b) En déduire le sens de variations de la fonction f.

(c) Que pensez-vous de votre première conjoncture ?

Partie B : contrôle de la deuxième conjoncture

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal (O, $\vec{\imath}$, $\vec{\jmath}$).
On se propose de contrôler la position de la courbe par rapport à l'axe $(x'x)$.

1. Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{-\alpha^3}{2(\alpha+2)}$.
2. On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[0\,;1]$ par $h(x) = \dfrac{-x^3}{2(x+2)}$.
   (a) Démontrer que $h'(x) = -\dfrac{x^2(x+3)}{(x+2)^2}$ pour x élément de $[0\,;1]$, puis déterminer le sens de variations de h sur $[0\,;1]$.
   (b) En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.
3. (a) Déterminer les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathcal{C}$ avec l'axe $(x'x)$.
   (b) Préciser alors la position de la courbe $\mathcal{C}$ par rapport à l'axe des abscisses.
   (c) Que pensez-vous de votre deuxième conjecture ?

✂ . . . .

ANNEXE exercice 3 : à découper et à coller sur votre copie