☙ Baccalauréat Blanc 2016 : correction ❧

EXERCICE 1 Le chikungunya est une maladie virale transmise d'un être humain à l'autre par les piqûres de moustiques femelles infectées.

Un test a été mis au point pour le dépistage de ce virus. Le laboratoire fabriquant ce test fournit les caractéristiques suivantes :

- la probabilité qu'une personne atteinte par le virus ait un test positif est de $0,98$;
- la probabilité qu'une personne non atteinte par le virus ait un test positif est de $0,01$.

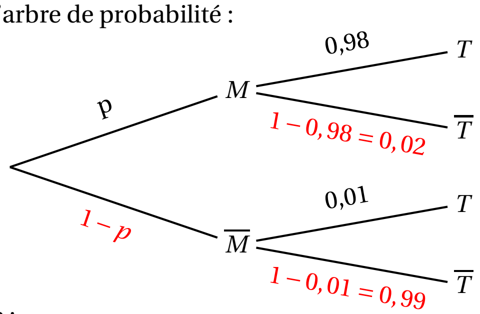
On procède à un test de dépistage systématique dans une population « cible ». Un individu est choisi au hasard dans cette population. On appelle :

- M l'évènement : « L'individu choisi est atteint du chikungunya »
- T l'évènement : « Le test de l'individu choisi est positif »

On notera $\overline{M}$ (respectivement $\overline{T}$) l'évènement contraire de l'évènement M (respectivement T).

On note p $(0 \leqslant p \leqslant 1)$ la proportion de personnes atteintes par la maladie dans la population cible.

1. **a.** On complète l'arbre de probabilité :



b. D'après l'arbre :

- $P(M \cap T) = P(M) \times P_M(T) = p \times 0,98 = 0,98p$
- $P(\overline{M} \cap T) = P(\overline{M}) \times P_{\overline{M}}(T) = (1-p) \times 0,01 = 0,01 - 0,01p$

D'après la formule des probabilités totales :

$P(T) = P(M \cap T) + P(\overline{M} \cap T) = 0,98p + 0,01 - 0,01p = 0,097p + 0,01$

2. **a.** La probabilité de M sachant T est $P_T(M) = \dfrac{P(M \cap T)}{P(T)} = \dfrac{0,98p}{0,97p+0,01} = \dfrac{98p}{97p+1} = f(p)$ où f est définie sur $[0\,;1]$.

b. La fonction f est une fonction rationnelle définie sur $[0\,;1]$ donc dérivable sur $[0\,;1]$ et :

$f'(p) = \dfrac{98 \times (97p+1) - 98p \times 97}{(97p+1)^2} = \dfrac{98}{(97p+1)^2} > 0$ sur $[0\,;1]$

La fonction f est donc strictement croissante sur $[0\,;1]$.

3. On considère que le test est fiable lorsque la probabilité qu'une personne ayant un test positif soit réellement atteinte du chikungunya est supérieure à $0,95$.

La probabilité $f(p)$ qu'une personne ayant un test positif soit réellement atteinte du chikungunya est égale à $0,95$ quand la proportion p est solution de l'équation $f(p) = 0,95$:

$f(p) = 0,95 \iff \dfrac{98p}{97p+1} = 0,95 \iff 9800p = 95 \times (97p+1) \iff 585p = 95 \iff p = \dfrac{19}{117}$ soit approximativement $0,162$.

La fonction f est strictement croissante sur $[0\,;1]$ donc si $p > \dfrac{19}{117}$, alors $f(p) > 0,95$.

C'est donc à partir d'une proportion $p = \dfrac{19}{117} \approx 16,2\,\%$ de malades dans la population que le test sera fiable.

EXERCICE 2

Le plan est muni du repère orthonormé direct $\left(\mathrm{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

On donne le nombre complexe $\mathrm{j} = -\dfrac{1}{2} + \mathrm{i}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$.

Partie A : propriétés du nombre j

1. **a.** On résout l'équation : $z^2+z+1=0$; $\Delta=-3<0$ donc cette équation admet deux solutions complexes conjuguées : $z_1=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$

   b. $\text{j}=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}=z_1$ donc j est solution de l'équation $z^2+z+1=0$.

2. $|\text{j}|^2=\left(-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}=1$ donc $|\text{j}|=1$

   $\text{j}=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$; on cherche θ tel que $\left\{\begin{array}{rcl}\cos\theta&=&-\dfrac{1}{2}\\ \sin\theta&=&\dfrac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right.$ Donc $\theta=\dfrac{2\pi}{3}\ [2\pi]$

   La forme exponentielle de j est donc : $\text{j}=\text{e}^{i\frac{2\pi}{3}}$

3. **a.** $\text{j}^3=\left(\text{e}^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^3=\text{e}^{i\frac{2\pi\times 3}{3}}=\text{e}^{i\times 2\pi}=1$

   b. j est solution de l'équation $z^2+z+1=0$ donc $\text{j}^2+\text{j}+1=0$ et donc $\text{j}^2=-1-\text{j}$.

4. On note P, Q, R les images respectives des nombres complexes 1, j et j^2 dans le plan.

   P a pour affixe 1 ; Q a pour affixe $\text{j}=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et R pour affixe $\text{j}^2=-1-\text{j}=-1+\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}=-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

   $\text{PQ}^2=\left|-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}-1\right|^2=\left|-\dfrac{3}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right|^2=\dfrac{9}{4}+\dfrac{3}{4}=3\Longrightarrow \text{PQ}=\sqrt{3}$

   $\text{QR}^2=\left|-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right|2=\left|-i\sqrt{3}\right|^2=3\Longrightarrow \text{QR}=\sqrt{3}$

   $\text{RP}^2=\left|1+\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right|^2=\left|\dfrac{3}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right|^2=\dfrac{9}{4}+\dfrac{3}{4}=3\Longrightarrow \text{RP}=\sqrt{3}$

   PQ = QR = RP donc le triangle PQR est équilatéral.

Partie B

Soit a, b, c trois nombres complexes vérifiant l'égalité $a+\text{j}b+\text{j}^2c=0$.
On note A, B, C les images respectives des nombres a, b, c dans le plan.

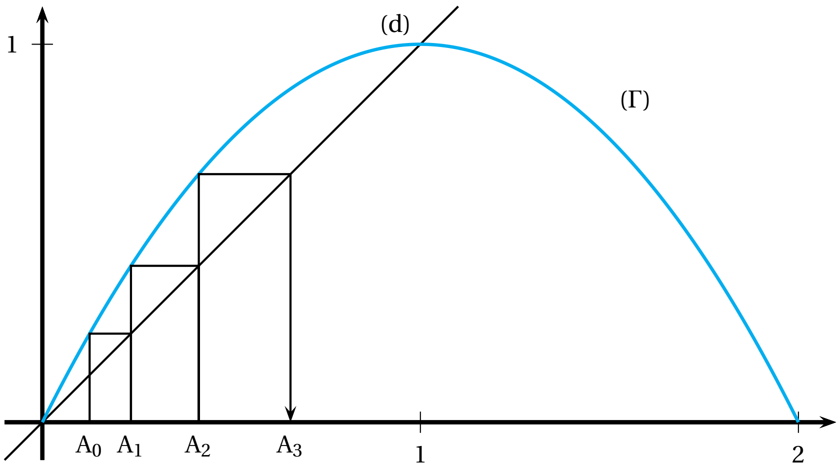
1. On sait que $a+b\text{j}+c\text{j}^2=0$ donc $a=-\text{j}b-\text{j}^2c$.
   Or, d'après la question **A. 3. b.**, $\text{j}^2=-1-\text{j}$ donc :
   $a=-\text{j}b-\text{j}^2c=-\text{j}b-(-1-\text{j})c=-\text{j}b+c+\text{j}c \iff a-c=\text{j}(c-b)$
2. $a-c=\text{j}(c-b)\Longrightarrow |a-c|=\left|\text{j}(c-b)\right| \iff |a-c|=\left|\text{j}\right|\times|c-b|$
   On a vu précédemment que $|\text{j}|=1$; de plus $|a-c|=\text{AC}$ et $|c-b|=\text{BC}$.
   On a donc démontré que AC = BC.
3. On sait que $a=-\text{j}b-\text{j}^2c$. On sait aussi que $\text{j}^2=-1-\text{j}$ donc $\text{j}=-1-\text{j}^2$.
   On a donc $a=-(-1-\text{j}^2)b-\text{j}^2c=b+\text{j}^2b-\text{j}^2c$ ce qui équivaut à $a-b=\text{j}^2(b-c)$.
4. On sait que $|\text{j}|=1$ donc $\left|\text{j}^2\right|=|\text{j}|^2=1$. De plus $|a-b|=\text{AB}$ et $|b-c|=\text{CB}$.
   On a vu dans la question précédente que $a-b=\text{j}^2(b-c)$ ce qui entraîne $|a-b|=\left|\text{j}^2(b-c)\right|$ ou encore $|a-b|=\left|\text{j}^2\right|\times|b-c|$. Cette dernière égalité équivaut à AB = CB.
   Comme AC = BC et AB = CB, on a démontré que le triangle ABC était équilatéral.

EXERCICE 3

1. **a.** Ave $n=0$, la relation de recurrence donne$u_1=u_0\left(2-u_0\right)=\dfrac{1}{8}\left(2-\dfrac{1}{8}\right)=\dfrac{1}{8}\times\dfrac{15}{8}=\dfrac{15}{64}$.

   Avec $n=1$, on obtient : $u_2=u_1\left(2-u_1\right)=\dfrac{15}{64}\left(2-\dfrac{15}{64}\right)=\dfrac{15}{64}\times\dfrac{113}{64}=\dfrac{1695}{4096}$.

b.



c. On part du point A_0 d'abscisse $u_0 = \dfrac{1}{8} = 0,125$, on va alternativement « vers » la courbe (Γ)(verticalement) puis vers la droite (d) (horizontalement) : les points de la droite et de la courbe ont successivement pour abscisses u_1, u_2, u_3,....

2. a. On a donc $0 < a < 1$:

- la relation est donc vraie au rang 0 : $0 < a = u_0 < 1$;
- Hérédité : supposons qu'il existe un naturel p tel que : $0 < u_p < 1$.

Montrons alors que $0 < u_{p+1} < 1$

Par (HR) on a $0 < u_p < 1$, or la fonction f est croissante sur $[0\,;\,1]$, donc :

$0 < u_p < 1 \Rightarrow f(0) < f\left(u_p\right) < f(1)$ soit

$0 < u_{p+1} < 1$.

Si u_p appartient à $[0\,;\,1]$, il en est de même pour u_{p+1}. L'hérédité est démontrée.

On a donc bien démontré par récurrence que si $a \in [0\,;\,1]$, alors $u_n \in [0\,;\,1]$ quel que soit le naturel n.

b. Calculons la différence $u_{n+1} - u_n = u_n(2 - u_n) - u_n = u_n(1 - u_n)$.

Or on vient de démontrer que $u_n < 1 \iff 1 - u_n > 0$ et comme $u_n > 0$, on obtient par produit $u_{n+1} - u_n > 0$, ce qui montre que la suite (u_n) est croissante.

c. La suite (u_n) est croissante et majorée par 1 : elle est donc convergente vers un nombre $\ell \leqslant 1$.

3. a. Quel que soit $n \in \mathbb{N}$, $v_{n+1} = 1 - u_{n+1} = 1 - u_n(2 - u_n) = 1 - 2u_n + u_n^2 = (1 - u_n)^2 = v_n^2$.

b. Pour $n = 0$, on a $v_0 = 1 - u_0 = 1 - \dfrac{1}{8} = \dfrac{7}{8}$.

D'où $v_1 = v_0^2 = \left(\dfrac{7}{8}\right)^2$.

Puis $v_2 = v_1^2 = \left[\left(\dfrac{7}{8}\right)^2\right]^2 = \left(\dfrac{7}{8}\right)^{2^2}$.

On va montrer par récurrence que $v_n = \left(\dfrac{7}{8}\right)^{2^n}$.

- La relation est vraie au rang zéro (et un).
- Hérédité : supposons qu'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $v_p = \left(\dfrac{7}{8}\right)^{2^p}$.

Montrons alors que $v_{p+1} = \left(\dfrac{7}{8}\right)^{2^{p+1}}$

par (HR) on a : $v_p = \left(\dfrac{7}{8}\right)^{2^p}$,

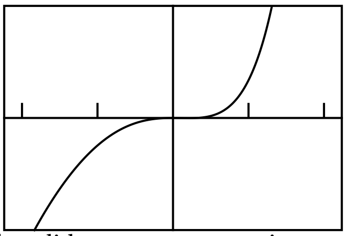
Comme $v_{p+1} = v_p^2 = \left[\left(\dfrac{7}{8}\right)^{2^p}\right]^2 = \left(\dfrac{7}{8}\right)^{2\times 2^p} = \left(\dfrac{7}{8}\right)^{2^{p+1}}$. La relation est vraie au rang $p+1$.

c. On a donc pour tout naturel n, $v_n = \left(\frac{7}{8}\right)^{2^n}$. Comme $-1 < \frac{7}{8} < 1$, on sait que $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{7}{8}\right)^{n} = 0$ et a fortiori $\lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{7}{8}\right)^{2^n} = 0$.
Conclusion : $\lim\limits_{n\to+\infty} v_n = 0$.
Comme $v_n = 1 - u_n \iff u_n = 1 - v_n$; on en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = 1$.

EXERCICE 4

$$f(x) = x^2\mathrm{e}^{x-1} - \frac{x^2}{2}.$$

Le graphique ci-dessous est la courbe représentative de cette fonction telle que l'affiche une calculatrice dans un repère orthonormal.



Conjectures
À l'observation de cette courbe, quelles conjectures pensez-vous pouvoir faire concernant
a. le sens de variations de f sur $[-3\,;\ 2]$?
b. la position de la courbe par rapport à l'axe des abscisses ?
Dans la suite de ce problème, on se propose de valider ou non ces conjectures et de les compléter.

Partie A : contrôle de la première conjecture

1. f somme de produits de fonctions dérivable sur $\mathbb{R}$ est dérivable sur $\mathbb{R}$et
$f'(x) = 2x\mathrm{e}^{x-1} + x^2\mathrm{e}^{x-1} - 2x\times\frac{1}{2} = x(x+2)\mathrm{e}^{x-1} - x = x\left[(x+2)\mathrm{e}^{x-1} - 1\right] = xg(x)$.

2. ?Étude du signe de $g(x)$ pour x réel.

a. g est un produit de fonctions dérivables sur $\mathbb{R}$, donc pour tout réel x, on a :
$g'(x) = \mathrm{e}^{x-1} + (x+2)\mathrm{e}^{x-1} = (x+3)\mathrm{e}^{x-1}$.
Quel que soit le réel x, $\mathrm{e}^{x-1} > 0$, donc le signe de $g'(x)$ est celui de $(x+3)$.
- $g'(x) > 0$ sur $]-3\,;\ +\infty[$;
- $g'(x) < 0$ sur $]-\infty\,;\ 3[$;
- $g'(-3) = 0$.

b. Du signe de la dérivée on déduit que g est décroissante sur $]-\infty\,;\ 3[$ puis croissante sur $]-3\,;\ +\infty[$. $g(-3)$ est le minimum de la fonction sur $\mathbb{R}$.

x	$-\infty$		-3		$+\infty$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
g	-1	$\searrow$	$-\mathrm{e}^{-4}-1$	$\nearrow$	$+\infty$

c. On a $g(1) = 2$. D'après l'étude des variations de g, sur l'intervalle $[-3\,;\ 1]$elle est croissante de $f(-3) < 0$ à $f(1) > 0$. Comme elle est continue sur cet intervalle il existe un réel unique $\alpha.in]-3\,;\ 1[$ tel que $f(\alpha) = 0$.
La calculatrice donne $g(0,20) \approx -0,011$ et $g(0,21) \approx 0,003$.
Pour les mêmes raisons on en déduit que $0,20 < \alpha < 0,21$.

d. D'après les deux questions précédentes on a donc :
- $g(x) < 0$ sur $]-\infty\,;\ \alpha[$;
- $g(\alpha) = 0$;
- $g(x) > 0$ sur $]\alpha\,;\ +\infty[$.

3. Sens de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

a. On a vu que $f'(x) = xg(x)$. On peut donc dresser le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		0		α		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$g(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

b. Comme $f'(x) < 0$ sur $]0\ ;\ \alpha[$ la fonction est strictement décroissante sur cet intervalle et croissante ailleurs.

c. La première conjoncture est fausse puisque f n'est pas croissante sur $[-3\ ;\ 2]$.

Partie B : contrôle de la deuxième conjoncture

1. On sait que α vérifie $g(\alpha) = 0 \iff (\alpha+2)\mathrm{e}^{\alpha-1} - 1 = 0 \iff (\alpha+2)\mathrm{e}^{\alpha-1} = 1 \iff \mathrm{e}^{\alpha-1} = \dfrac{1}{\alpha+2}$ (car $\alpha + 2 \neq 0$).

On a donc $f(\alpha) = \alpha^2\mathrm{e}^{\alpha-1} - \dfrac{\alpha^2}{2} = \alpha^2 \times \dfrac{1}{\alpha+2} - \dfrac{\alpha^2}{2} = \dfrac{\alpha^2}{\alpha+2} - \dfrac{\alpha^2}{2} = \dfrac{2\alpha^2 - (\alpha+2)\alpha^2}{2(\alpha+2)} =$ $f(\alpha) = -\dfrac{\alpha^3}{2(\alpha+2)}$.

2. On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[0\,;\,1]$ par $h(x) = \dfrac{-x^3}{2(x+2)}$.

a. h quotient de fonctions dérivables le dénominateur ne s'annulant pas sur $[0\,;\,1]$, est dérivable et sur cet intervalle :

$h'(x) = \dfrac{-3x^2 \times 2(x+2) + x^3 \times 2}{4(x+2)^2} = \dfrac{-3x^3 - 6x^2 + x^3}{2(x+2)^2} = \dfrac{-2x^3 - 6x^2}{2(x+2)^2} = -\dfrac{x^2(x+3)}{(x+2)^2}$.

Comme sur $[0\,;\,1]$, $x^2 > 0$, $(x+2)^2 > 0$ et $(x+3) > 0$, on en déduit que $h'(x) < 0$: la fonction h est donc strictement décroissante sur $[0\,;\,1]$ et donc en particulier sur $[0{,}20\,;\,0{,}21]$.

b. On sait que $0{,}20 < \alpha < 0{,}21$ d'où par décroissance de la fonction h, $h(0{,}20) > h(\alpha) > h(0{,}21)$.

La calculatrice livre $h(0{,}20) \approx -0{,}001\,8$ et $h(0{,}21) \approx -0{,}002\,1$, d'où $-0{,}002\,1 < f(\alpha) < -0{,}001\,8$.

3. a. Les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec l'axe $(x'x)$ sont les solutions de l'équation $f(x) = 0$, soit

$$x^2\left(\mathrm{e}^{x-1} - \frac{1}{2}\right) = 0 \iff \left\{\begin{array}{lcl} x^2 & = & 0 \\ \mathrm{e}^{x-1} & = & \frac{1}{2} \end{array}\right.$$

On obtient d'une part la solution double $x = 0$ et $x - 1 = \ln\frac{1}{2}$ par croissance de la fonction ln, soit $x = 1 + \ln\frac{1}{2} = 1 - \ln 2 \approx 0{,}31$.

Les abscisses des points d'intersection de la courbe $\mathscr{C}$ avec l'axe $(x'x)$ sont donc $x = 0$ et $x = 1 - \ln 2$.

b. La position de la courbe $\mathscr{C}$ par rapport à l'axe des abscisses est donnée par le signe de $f(x)$.

Comme $x^2 > 0$, quel que soit x le signe de $f(x)$ est celui de $\mathrm{e}^{x-1} - \frac{1}{2}$.

La courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de l'axe des abscisses si et seulement si $\mathrm{e}^{x-1} - \frac{1}{2} > 0 \iff \mathrm{e}^{x-1} > \frac{1}{2} \iff x - 1 > \ln\frac{1}{2}$ (par croissance de la fonction ln) et enfin $x > 1 + \ln\frac{1}{2}$.

Conclusion : La courbe $\mathscr{C}$ est au-dessus de l'axe des abscisses sur l'intervalle $]1 - \ln 2\ ;\ +\infty[$, en dessous ailleurs sauf aux deux points de contact en $x = 0$ et $x = 1 - \ln 2$.

c. La deuxième conjecture est également fausse car $\mathscr{C}$ est au dessous de $(x'x)$ pour des réels x strictement positifs.