BACCALAURÉAT BLANC

Session 2015

MATHÉMATIQUES

Série S

Enseignement obligatoire

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées conformément à la loi en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 4 pages numérotées de 1 à 4.

exercice 1 : 4pts

Une entreprise confie à une société de sondage par téléphone une enquête sur la qualité de ses produits. Chaque enquêteur a une liste de personnes à contacter.

Lors du premier appel téléphonique, la probabilité pour que le correspondant soit absent est 0,4. Sachant que le correspondant est présent, la probabilité pour qu'il accepte de répondre au questionnaire est $0,2$.

1. On note :
   - A_1 l'évènement ≪ la personne est absente lors du premier appel ≫ ;
   - R_1 l'évènement ≪ la personne accepte de répondre au questionnaire lors du premier appel ≫.

   Quelle est la probabilité de R_1 ?
2. Lorsqu'une personne est absente lors du premier appel, on lui téléphone une seconde fois, à une heure différente, et, alors, la probabilité pour qu'elle soit absente est $0,3$. Et, sachant qu'elle est présente lors du second appel, la probabilité pour qu'elle accepte de répondre au questionnaire est encore $0,2$.

   Si une personne est absente lors du second appel, on ne tente plus de la contacter.

   On note :

   A_2 l'évènement ≪ la personne est absente lors du second appel ≫ ;

   R_2 l'évènement ≪ la personne accepte de répondre au questionnaire lors du second appel ≫ ;

   R l'évènement ≪ la personne accepte de répondre au questionnaire ≫.

   Montrer que la probabilité de R est $0,176$. (On pourra utiliser un arbre).
3. Sachant qu'une personne a accepté de répondre au questionnaire, quelle est la probabilité pour que la réponse ait eu lieu lors du premier appel ?
4. On suppose que les sondages auprès des personnes d'une même liste sont indépendants. Un enquêteur a une liste de 20 personnes à contacter. Quelle est la probabilité pour qu'une au moins des 20 personnes de la liste accepte de répondre au questionnaire ?

exercice 2 : 5pts

Soient deux suites (u_n) et (v_n) définies par $u_0 = 2$ et $v_0 = 10$ et pour tout entier naturel n,

$$u_{n+1} = \frac{2u_n + v_n}{3} \quad \text{et} \quad v_{n+1} = \frac{u_n + 3v_n}{4}.$$

PARTIE A

On considère l'algorithme suivant :

Variables :	N est un entier
	U, V, W sont des réels
	K est un entier
Début :	Affecter 0 à K
	Affecter 2 à U
	Affecter 10 à V
	Saisir N
	Tant que $K < N$
	Affecter $K + 1$ à K
	Affecter U à W
	Affecter $\dfrac{2U+V}{3}$ à U
	Affecter $\dfrac{W+3V}{4}$ à V
	Fin tant que
	Afficher U
	Afficher V
Fin	

On exécute cet algorithme en saisissant $N = 2$. Recopier et compléter le tableau donné ci-dessous donnant l'état des variables au cours de l'exécution de l'algorithme.

K	W	U	V
0			
1			
2			

PARTIE B

1. (a) Montrer que pour tout entier naturel $n,\ v_{n+1} - u_{n+1} = \dfrac{5}{12}(v_n - u_n)$.
   (b) Pour tout entier naturel n on pose $w_n = v_n - u_n$.
   Montrer que pour tout entier naturel $n,\ w_n = 8\left(\dfrac{5}{12}\right)^n$.
2. (a) Démontrer que la suite (u_n) est croissante et que la suite (v_n) est décroissante.
   (b) Déduire des résultats des questions 1. b. et 2. a. que pour tout entier naturel n on a $u_n \leqslant 10$ et $v_n \geqslant 2$.
   (c) En déduire que tes suites (u_n) et (v_n) sont convergentes.
3. Montrer que les suites (u_n) et (v_n) ont la même limite.
4. Montrer que la suite (t_n) définie par $t_n = 3u_n + 4v_n$ est constante.
   En déduire que la limite commune des suites (u_n) et (v_n) est $\dfrac{46}{7}$.

exercice 3 : 7pts

Partie A : Étude d'une fonction auxiliaire
Soit φ la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par

$$\varphi(x) = \left(x^2 + x + 1\right)\mathrm{e}^{-x} - 1.$$

1. (a) Déterminer les limites de φ en $-\infty$ et en $+\infty$.
   On donne le résultat suivant : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^2} = +\infty$

(b) Étudier le sens de variation de φ puis dresser son tableau de variations sur $\mathbb{R}$.

2. Démontrer que l'équation $\varphi(x) = 0$ admet deux solutions dans $\mathbb{R}$, dont l'une dans l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$, qui sera notée α.
   Déterminer un encadrement d'amplitude 10^{-2} de α.
3. En déduire le signe de $\varphi(x)$ sur $\mathbb{R}$ et le présenter dans un tableau.

Partie B : Étude de la position relative de deux courbes
Les fonctions f et g sont définies sur $\mathbb{R}$ par :

$$f(x) = (2x+1)\mathrm{e}^{-x} \quad \text{et} \quad g(x) = \frac{2x+1}{x^2+x+1}.$$

Leurs courbes représentatives dans un repère orthogonal $(\mathrm{O},\ \vec{\imath},\ \vec{\jmath})$ sont notées $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

1. Démontrer que les deux courbes passent par le point A de coordonnées (0 ; 1) et admettent en ce point la méme tangente.
2. (a) Démontrer que, pour tout nombre réel x, $f(x) - g(x) = \dfrac{(2x+1)\varphi(x)}{x^2+x+1}$ où φ est la fonction étudiée dans la **partie A**.
   (b) À l'aide d'un tableau, étudier le signe de $f(x) - g(x)$ sur $\mathbb{R}$.
   (c) En déduire la position relative des courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.

exercice 4 : 4pts

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

1. Soit (E) l'équation d'inconnue z : $3z^2 + z + m = 0$, où m est un réel donné.
   Proposition 1 : pour toute valeur de m, (E) a deux racines complexes conjuguées.
2. Soit (E) l'équation d'inconnue $z \in \mathbb{C}$: $(1+i)z + 3\overline{z} = 2i$.
   Proposition 2 : (E) a une infinité de solutions
3. Soit $z = 3 + \mathrm{i}\sqrt{3}$.
   Proposition 3 : Pour tout entier naturel n non nul, z^{3n} est imaginaire pur.
4. Soit z un nombre complexe non nul.
   Proposition 4 : Si $z\overline{z} = 1$, alors $z + \dfrac{1}{z}$ est un nombre réel.