BACCALAURÉAT BLANC

Session 2014

MATHÉMATIQUES

Série S

Enseignement obligatoire

Durée de l'épreuve : 4 heures

Coefficient : 7

Les calculatrices électroniques de poche sont autorisées conformément à la loi en vigueur.

Le sujet est composé de 4 exercices indépendants.
Le candidat doit traiter tous les exercices.
La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part importante dans l'appréciation des copies.

Avant de composer, le candidat s'assurera que le sujet comporte bien 5 pages numérotées de 1 à 5.

Exercice 1 **6 points**

Partie A

1. L'objet de cette question est de démontrer que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$.

On suppose connus les résultats suivants :

- La fonction exponentielle est dérivable sur $\mathbb{R}$ et est égale à sa fonction dérivée
- $\mathrm{e}^0 = 1$
- Pour tout réel x, on a $\mathrm{e}^x > x$
- Soit deux fonctions v et w définies sur l'intervalle $[A\,;\,+\infty[$, où A est un réel positif.
  Si pour tout x de $[A\,;\,+\infty[$, $v(x) \leqslant w(x)$ et si $\lim\limits_{x \to +\infty} v(x) = +\infty$, alors $\lim\limits_{x \to +\infty} w(x) = +\infty$.

a. Soit φ la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $\varphi(x) = \mathrm{e}^x - \dfrac{x^2}{2}$.
Montrer que pour tout x de $[0\,;\,+\infty[$, $\varphi(x) \geqslant 1$.

b. En déduire que $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$.

2. Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{2}x\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x}$.

a. Étudier la limite de la fonction f en $+\infty$.

b. Étudier les variations de la fonction f, puis dresser son tableau de variations sur $[0\,;\,+\infty[$.

Partie B

On fait absorber à un animal un médicament dosé à 1 mg de principe actif. Ce médicament libère peu à peu le principe actif qui passe dans le sang. On appelle $g(t)$ la quantité de principe actif, exprimée en mg, présente dans le sang à l'instant t exprimé en heures $(t \geqslant 0)$.

On constate expérimentalement que la fonction g est telle qu'il existe un réel a tel que pour tout réel $t \geqslant 0$:

$$g(t) = \left(a + \frac{1}{2}t\right) e^{-\frac{1}{2}t}$$

1. Montrer que la fonction g vérifie pour tout réel a et tout réel positif ou nul t :

$$g'(t) + \frac{1}{2}g(t) = \frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}t}$$

2. On suppose qu'à l'instant $t = 0$, la quantité de principe actif présente dans le sang est nulle.
Montrer que la fonction g correspondante est la fonction f étudiée dans la **partie A**.

3. On donne l'algorithme suivant :

Entrée	Affecter la valeur 3 à la variable n.
Traitement	Tant que $f(n) > 0,1$
	Affecter à n la valeur $n + 1$.
	Fin Tant que
Sortie	Afficher la valeur de n.

où f est la fonction étudiée dans la **partie A**.

a. à l'aide de la question 2. a. de la **partie A**, expliquer pourquoi il est certain que cet algorithme donne une valeur en sortie.

b. Quelle est la valeur n_0 de la variable n obtenue à la sortie de l'algorithme ?

c. L'absorption du médicament par l'animal a lieu un matin à 8 h. à quelle question cet algorithme permet-il de répondre ?

EXERCICE 2 **5 points**

Pour chacune des propositions suivantes, indiquer si elle est vraie ou fausse et donner une démonstration de la réponse choisie. Une réponse non démontrée ne rapporte aucun point. Toutefois, toute trace de recherche, même incomplète, ou d'initiative, même non fructueuse, sera prise en compte dans l'évaluation.

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormal direct $\left(\text{O},\ \vec{u},\ \vec{v}\right)$.

1. Soient A le point d'affixe $2-5\text{i}$ et B le point d'affixe $7-3\text{i}$.
   Proposition 1 : Le triangle OAB est rectangle isocèle.
2. Soit (Δ) l'ensemble des points M d'affixe z telle que $|z-\text{i}| = |z+2\text{i}|$.
   Proposition 2 : (Δ) est une droite parallèle à l'axe des réels.
3. Soit $z = 3+\text{i}\sqrt{3}$.
   Proposition 3 : Pour tout entier naturel n non nul, z^{3n} est imaginaire pur.
4. Soit z un nombre complexe non nul.
   Proposition 4 : Si $\dfrac{\pi}{2}$ est un argument de z alors $|\text{i}+z| = 1+|z|$.
5. Soit z un nombre complexe non nul.
   Proposition 5 : Si le module de z est égal à 1 alors $z^2+\dfrac{1}{z^2}$ est un nombre réel.

EXERCICE 3 **4 points**

Le personnel d'un très grand hôpital est réparti en trois catégories : les médecins, les soignants (non médecins) et le personnel AT (administratif ou technique).
$12\,\%$ des personnels sont des médecins et $71\,\%$ sont des soignants.
$67\,\%$ des médecins sont des hommes et $92\,\%$ des soignants sont des femmes.

On donnera une valeur approchée de tous les résultats à 10^{-4} près.

1. On interroge au hasard un membre du personnel de cet hôpital.
   a. Quelle est la probabilité d'interroger une femme soignante ?
   b. Quelle est la probabilité d'interroger une femme médecin ?
   c. On sait que $80\,\%$ du personnel est féminin. Calculer la probabilité d'interroger une femme AT.
   En déduire la probabilité d'interroger une femme sachant que la personne interrogée fait partie du personnel AT.
2. Une entreprise souhaite envoyer un courrier publicitaire à 40 personnes qui travaillent dans cet hôpital. Elle a la liste du personnel mais ne connaît pas la fonction de chacun. Elle choisit au hasard 40 noms de la liste (en raison de la taille de la population, on considère qu'il s'agit de 40 tirages successifs indépendants avec remise).
   Quelle est la probabilité que, sur les 40 courriers envoyés, au moins un soit reçu par des médecins ?
3. Cette même entreprise , envoie un courrier publicitaire à n personnes (où n est un entier naturel supérieur à 1) qui travaillent dans cet hôpital. Elle a la liste du personnel mais ne connaît pas la fonction de chacun. Elle choisit au hasard n noms de la liste (en raison de la taille de la population, on considère qu'il s'agit de n tirages successifs indépendants avec remise). On note p_n la probabilité que, sur les n courriers envoyés, au moins un soit reçu par des médecins.
   Déterminer le plus entier n, à partir duquel $p_n \geqslant 0.99$.

EXERCICE 4 **5 points**

On considère la suite (u_n) définie sur $\mathbb{N}$ par :

$$u_0 = 2 \quad \text{et pour tout entier naturel } n,\ u_{n+1} = \frac{u_n + 2}{2u_n + 1}.$$

On admet que pour tout entier naturel $n, u_n > 0$.

1. **a.** Calculer u_1, u_2, u_3, u_4. On pourra en donner une valeur approchée à 10^{-2} près.

b. Vérifier que si n est l'un des entiers 0, 1, 2, 3, 4 alors $u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$.

c. Établir que pour tout entier naturel $n, u_{n+1} - 1 = \dfrac{-u_n + 1}{2u_n + 1}$.

d. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel $n,\ u_n - 1$ a le même signe que $(-1)^n$

2. Pour tout entier naturel n, on pose $v_n = \dfrac{u_n - 1}{u_n + 1}$.

a. Établir que pour tout entier naturel $n, v_{n+1} = \dfrac{-u_n + 1}{3u_n + 3}$.

b. Démontrer que la suite (v_n) est une suite géométrique de raison $-\dfrac{1}{3}$.
En déduire l'expression de v_n en fonction de n.

c. Exprimer u_n en fonction de v_n, puis en fonction de n et déterminer la limite de la suite (u_n).